

Vitor Luiz de Matos

**UM MODELO PARA O PLANEJAMENTO ANUAL DA
OPERAÇÃO ENERGÉTICA CONSIDERANDO TÉCNICAS
AVANÇADAS DE OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Erlon Cristian Finardi

Florianópolis
2012

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

de Matos, Vitor Luiz

UM MODELO PARA O PLANEJAMENTO ANUAL DA OPERAÇÃO
ENERGÉTICA CONSIDERANDO TÉCNICAS AVANÇADAS DE OTIMIZAÇÃO
ESTOCÁSTICA [tese] / Vitor Luiz de Matos ; orientador,
Erlon Cristian Finardi - Florianópolis, SC, 2012.
267 p. ; 21cm

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica.

Inclui referências

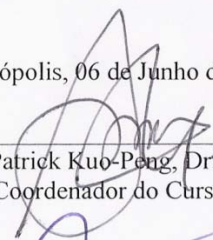
1. Engenharia Elétrica. 2. Planejamento de Sistemas de
Energia. 3. Otimização Estocástica. 4. Metodologia de
Aversão a Risco. I. Finardi, Erlon Cristian. II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Elétrica. III. Título.

Vitor Luiz de Matos

**UM MODELO PARA O PLANEJAMENTO ANUAL DA
OPERAÇÃO ENERGÉTICA CONSIDERANDO TÉCNICAS
AVANÇADAS DE OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA**

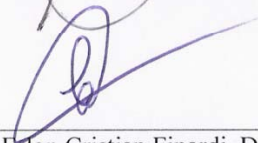
Esta Tese foi julgada adequada para obtenção do Título de “Doutor em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em *Sistemas de Energia Elétrica*”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Florianópolis, 06 de Junho de 2012.




Prof. Patrick Kuo-Peng, Dr. INPT.
Coordenador do Curso

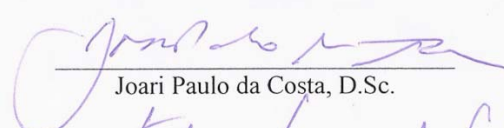
Banca Examinadora:



Prof. Erlon Cristian Finardi, D. Eng.
Orientador



Prof(a). Claudia Alejandra Sagastizábal, D. Habil.



Joari Paulo da Costa, D.Sc.



Prof. Edson Luiz da Silva, D.Eng.



Prof. Roberto de Souza Salgado, Ph.D

*À minha família, por tudo.
Pois, sem ela, nada disso seria possível!*

AGRADECIMENTOS

Escrever os agradecimentos foi tão difícil quanto qualquer outra seção ou capítulo desta tese, visto que depois de um longo período de estudos para concluir este trabalho houveram inúmeras pessoas que participaram de maneira bastante importante para esse resultado final. As contribuições foram da forma mais variada, seja com discussões técnicas sobre o tema e assuntos relacionados ou com uma palavra de suporte e incentivo. Como foram tantas pessoas importantes, peço que me desculpem aqueles que por ventura não estiverem citados nominalmente, mas saibam que o meu agradecimento é para vocês também.

Primeiramente, gostaria de agradecer à minha família que sem o seu apoio nada seria possível. Ao meu pai, Antonio, e minha mãe, Vera, que sempre estiveram ao meu lado desde os primeiros anos de estudo. À minha esposa, Katherine, com quem eu divido diariamente as minhas angústias e conquistas, uma mulher muito especial com quem tenho a felicidade de compartilhar tudo. Às minhas irmãs, Débora e Camila, que me aturaram e o continuam fazendo com muito companheirismo. Aos meus sogro e sogra, Valdir e Laurestela, pelo apoio e incentivo.

Agradeço, em especial, ao meu orientador acadêmico, o Prof. Erlon Cristian Finardi, pela amizade construída ao longo desses seis anos de mestrado e doutorado e pela oportunidade oferecida, sugestão de tema, inspirada orientação, confiança demonstrada, constante incentivo em todo trabalho.

Agradeço, também:

Ao Prof. Edson Luiz da Silva que foi importante na decisão de que caminho trilhar com o importante apoio e incentivo desde o tempo de graduação, bem como pelas contribuições no decorrer dos estudos e na elaboração do documento final.

Ao Prof. Andrew Bryan Philpott, da University of Auckland, com quem tive a oportunidade de trabalhar por seis meses na Nova Zelândia e com essa parceria possibilitou uma constante e proveitosa cooperação técnica-científica que se concretizou nos últimos anos.

À Prof. Cláudia Sagastizabal, do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), com quem tive a oportunidade de ter muitas discussões essenciais no desenvolvimento desse trabalho e que abriu portas importantes no mundo científico.

Ao Eng. Joari Paulo da Costa, do Operador Nacional do Sistema (ONS), pelo constante apoio em discussões técnicas e pelas sugestões para a elaboração do trabalho.

Ao Prof. Roberto de Souza Salgado, que apesar de não ter participado da banca final de tese por motivos de viagem, foi importante pelo apoio desde o tempo de graduação e sugestões para a elaboração do trabalho.

Ao Prof. Antonio José Alves Simões Costa e ao Eng. Alexandre Nunes Zucarato, da Câmara de Comercialização de Energia Elétrica (CCEE), que contribuíram de forma relevante no exame de qualificação e, assim, foram importantes no desenvolvimento do trabalho.

Ao Prof. Ildemar Cassana Decker e demais professores do LabPlan, pela transmissão de conhecimento e apoio desde o tempo de graduação.

Aos amigos do LabPlan, *Diego Issicaba, Moises Santos, Diego Brancher, Fabio Brum, Leonardo Cavalcanti, Waneska Patrícia, Raphael Gonçalves, Fabrício Takigawa, Alexandre Zucarato, Daniel Dotta, Edison Aranha, Everthon Sica, Fabiano Andrade, George Mendonça, Gustavo Arfux, Marcelo Agostini, Marcelo Santos, Maurício Sperandio, Rafael Rodrigues, Rubiapiara Cavalcante, Gelson Brigatto, Vanessa Araújo, Alexandre Fürstenberger, Marcelo Benetti, André Krauss, Juliane Almeida, Marcelo Cordova, Paulo Larroyd, Murilo Scuzziato, Daniel Tenfen, Matheus Cruz, Juan Caicedo, Mauro González, Ricardo Quintero, Jorge Gomez, Hermano Veronese, Brigida Decker, Edgar da Silva, Diego Bittencourt, André Rodigheri, Paulo André, Pedro Vieira, Rodolfo Bialecki, Geyson Brustolin, Thiago Jeremias, Fábio, Valmor Zimmer*, e todos os colegas com quem tive a oportunidade de vivenciar seis anos da minha vida profissional com grandes aprendizados e muita descontração, o que tornou a caminhada bem menos árdua.

Aos amigos de muitos anos, *Joelmir, Lucas Barcelos, Vanessa Maria, Alda, Fernando, Daniel, Leandro, Patrícia, Fernando Gomes, Abelaïne, Rafael, Renata, Lucas Lorenzo, Rodrigo, Giselle, Vinicius, Fernanda, Vanessa Pereira, Álvaro, Aline*, que sempre estiveram ao meu lado em várias etapas da minha vida.

À Tracebetel Energia S.A., empresas do Projeto Estratégico Tema 1 Linha 4 e intervenientes (CCEE, ONS, EPE e ANEEL), aos seus profissionais, pela constante troca de informações e apoio financeiro para o desenvolvimento deste trabalho.

Finalmente, esta pesquisa contou com o apoio financeiro do **Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico** (CNPq).

De coração, muito obrigado a todos vocês.

A mente que se abre a uma nova ideia jamais
voltará ao seu tamanho original.
(Albert Einstein)

RESUMO

O problema do planejamento da operação energética do Sistema Interligado Nacional (SIN) é bastante peculiar devido, especialmente, à sua dimensionalidade e a grande participação de geração hidrelétrica. A participação majoritária de recursos hídricos exige um planejamento bastante minucioso, uma vez que a capacidade de armazenamento dos reservatórios é limitada e, portanto, a disponibilidade futura de energia dependerá da operação dos reservatórios e das vazões afluentes futuras. Devido às complexidades do problema, no Brasil optou-se por separar os estudos de planejamento da operação energética em etapas de médio prazo, curto prazo e programação diária. O foco deste trabalho é o modelo computacional utilizado no médio prazo – Planejamento Anual da Operação Energética (PEN), cujo objetivo consiste em estabelecer estratégias de médio prazo para a operação, por meio da análise das condições de atendimento a demanda no horizonte de estudo. Este trabalho objetiva aplicar técnicas avançadas de otimização estocástica no problema do PEN, de maneira a produzir políticas de operação de melhor qualidade considerando os principais aspectos de um problema como o PEN. Dentre as técnicas de otimização estocástica que são analisadas neste trabalho destacam-se: (i) técnicas de amostragem com redução da variância (*Latin Hypercube Sampling* e Quasi Monte Carlo Aleatório); (ii) estratégia de solução e seleção de cortes para melhorar o desempenho da Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE); (iii) metodologia para avaliação da qualidade da política de operação e (iv) metodologias para construir uma política de operação com aversão a risco. Além disso, este documento apresenta uma descrição detalhada da modelagem utilizada no modelo computacional do PEN, como por exemplo, a representação por Reservatório Equivalente de Energia (REE), o modelo AutoRegressivo Periódico (ARP) e o algoritmo da PDDE. As técnicas de otimização estocástica são avaliadas em estudos de casos que consideram o SIN com dados para estudos que se iniciam em Janeiro de 2009 e Janeiro de 2012. Destacam-se nos resultados as políticas com aversão a risco que mantêm um armazenamento maior à medida que se aumenta o nível de aversão a risco.

Palavras-chave: Otimização estocástica. Planejamento Anual da Operação Energética. Planejamento em sistemas hidrotérmicos. Avaliação da qualidade da política de operação. Aversão a Risco aplicada a PDDE.

ABSTRACT

The Interconnected Brazilian Power System's operation planning problem is very unique, due to its dimension and high participation of hydroelectric power plants. As a consequence of the latter, it is necessary to perform a very precise hydrothermal scheduling because the reservoirs capacity are limited and, therefore, the energy availability depends on future inflows and how the reservoirs are operated. Due to the problem's complexity, the Brazilian hydrothermal scheduling is divided into three stages: long-term, short-term and daily operation programming. This work is focused on the Long-Term Hydrothermal Scheduling (LTHS) problem, which aims to determine an optimal operational strategy through the analysis of the energy market and load supply conditions over the planning period. The objective of this work is to apply advanced stochastic programming techniques to the LTHS problem, in order to compute an enhanced operation policy considering the main aspects of a problem such as the LTHS. We analyze four stochastic programming techniques: (i) variance reduction sampling strategies (Latin Hypercube Sampling and Randomized Quasi-Monte Carlo); (ii) tree traversing strategies and cut selection to improve the Stochastic Dual Dynamic Programming (SDDP) algorithm; (iii) assessing the operation policy quality and (iv) risk aversion. In addition to that, this document presents a detailed description of the modeling used for the LTHS problem, such as, the Equivalent Energy Reservoir (EER) representation, the Periodic Autoregressive model and the SDDP algorithm. The stochastic programming techniques are evaluated in case study considering the Interconnected Brazilian Power System with data from January 2009 and January 2012. From the results we can point out the risk aversion policies which store more energy (water) in the reservoirs as we increase the level of risk aversion.

Keywords: Stochastic Programming. Long-Term Hydrothermal Scheduling. Hydrothermal Scheduling. Assessing operation policy quality. Risk aversion applied to SDDP.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Gráfico de $z(x, 50)$. Ponto de mínimo é $x^* = 50$.	43
Figura 2 - Gráficos de $z(x, \xi)$ referentes aos problemas (2.9), (2.10) e (2.11).	47
Figura 3 - Árvore de cenários para dois estágios.	48
Figura 4 - Árvore de Cenários para 4 estágios.	50
Figura 5 - Árvore de cenários.	52
Figura 6 - Diferentes modelagens para a árvore de cenários.	52
Figura 7 - Árvore de cenários uniforme	53
Figura 8 - Árvore de cenários uniforme com amostras comuns.	54
Figura 9 - Função de Custo Futuro formada pelos Cortes de Benders.	61
Figura 10 - Evolução do Z_{INF} e Z_{SUP} .	63
Figura 11 - Recursão progressiva com cenários sorteados por MC.	66
Figura 12 - Árvore de cenários com amostras comuns para a PDDE.	68
Figura 13 - Critério de parada da PDDE.	71
Figura 14 - Recursão regressiva.	71
Figura 15 - Parábola do Fator de correção da energia controlável no mês de Janeiro do REE SE/CO.	90
Figura 16 - Relação de y_p e y_b para o REE SE/CO.	93
Figura 17 - Relação entre energia controlável e afluyente para o REE SE/CO.	95
Figura 18 - Parábola da Energia de Vazão Mínima para o REE SE/CO.	96
Figura 19 - Parábola da Energia Evaporada no mês de Janeiro do REE SE/CO.	97
Figura 20 - Parábola da Geração Hidráulica Máxima para o REE SE/CO.	99
Figura 21 - Cascata com diferentes REEs	107
Figura 22 - Separação da cascata por REE.	108
Figura 23 - Cascata com usinas fictícias.	108
Figura 24 - Histograma da Energia Afluyente do Subistema SE/CO (Junho).	111
Figura 25 - Modelo $ARP(p)$ com a Transformação Box-Cox.	112
Figura 26 - Árvore de cenários do modelo $ARP(p)$ com a transformação Box-Cox.	113
Figura 27 - Coeficientes da FACP e Intervalo de Confiança.	118
Figura 28 - Árvore de cenários do PEN.	122
Figura 29 - Divisão da demanda de energia em três patamares de carga.	126
Figura 30 - Sorteio de 8 pontos em 2 dimensões com o MC.	150
Figura 31 - Sorteio de 8 pontos em 2 dimensões com o QMC.	150

Figura 32 - Intervalos para sorteio unidimensional de N amostras com o LHS.....	151
Figura 33 - Sorteio bidimensional de 8 amostras com o LHS.....	151
Figura 34 - Seleção de cortes por nível de dominância.....	167
Figura 35 - Posição geográfica dos subsistemas e configuração dos intercâmbios.....	182
Figura 36 - Comparação entre os Casos 0 e 1.....	187
Figura 37 - Diferença do Z_{INF} e Z_{SUP} no Caso 1.....	187
Figura 38 - Diferença do Z_{INF} e Z_{SUP} no Caso 2.....	188
Figura 39 - Diferença do Z_{INF} e Z_{SUP} no Caso 3.....	188
Figura 40 - Diferença do Z_{INF} e Z_{SUP} no Caso 4.....	189
Figura 41 - Diferença do Z_{INF} e Z_{SUP} no Caso 5.....	189
Figura 42 - Diferença do Z_{INF} e Z_{SUP} no Caso 6.....	190
Figura 43 - Diferença do Z_{INF} e Z_{SUP} no Caso 7.....	190
Figura 44 - Diferença do Z_{INF} e Z_{SUP} no Caso 8.....	191
Figura 45 - Diferença do Z_{INF} e Z_{SUP} no Caso 9.....	191
Figura 46 - Diferença do Z_{INF} e Z_{SUP} no Caso 1.....	193
Figura 47 - Diferença do Z_{INF} e Z_{SUP} no Caso 2.....	194
Figura 48 - Diferença do Z_{INF} dos Casos 2 e 3.....	194
Figura 49 - Diferença do Z_{INF} dos Casos 2 e 4.....	195
Figura 50 - Limite inferior dos casos com 1 cenário por recursão.....	201
Figura 51 - Zoom no limite inferior dos casos com 1 cenário por recursão.....	201
Figura 52 - Custo esperado de operação para 1 cenário por iteração.....	202
Figura 53 - Zoom no custo esperado de operação para 1 cenário por iteração.....	202
Figura 54 - Tempo computacional para 1 cenários por recursão.....	203
Figura 55 - Limite inferior para os casos incrementando.....	204
Figura 56 - Custo esperado de operação para os casos incrementando....	205
Figura 57 - Tempo computacional dos casos incrementando.....	205
Figura 58 - Limite inferior para os casos da PDDE tradicional.....	206
Figura 59 - Custo esperado de operação para os casos da PDDE tradicional.....	206
Figura 60 - Tempo computacional para os casos da PDDE tradicional...	207
Figura 61 - Limite inferior das estratégias de solução da PDDE.....	207
Figura 62 - Zoom no limite inferior das estratégias de solução da PDDE.....	208
Figura 63 - Custo esperado de operação das estratégias de solução da PDDE.....	208
Figura 64 - Tempo computacional das estratégias de solução da PDDE.....	209
Figura 65 - Tempo computacional para os casos da Avaliação da Política.....	211

Figura 66 - Custo Inferior (Z_{INF}) para o Sorteio MC.....	211
Figura 67 - Custo Inferior (Z_{INF}) para o Sorteio LHS.....	212
Figura 68 - Custo Inferior (Z_{INF}) para o Sorteio QMCA.....	212
Figura 69 - Custo esperado de operação nos 5000 cenários do Sorteio MC.....	213
Figura 70 - Custo esperado de operação nos 5000 cenários do Sorteio LHS.....	213
Figura 71 - Custo esperado de operação nos 5000 cenários do Sorteio QMCA.....	213
Figura 72 - IC de 95% do <i>gap</i> de otimalidade tradicional com Sorteio MC.....	214
Figura 73 - IC de 95% do <i>gap</i> de otimalidade tradicional com Sorteio LHS.....	215
Figura 74 - IC de 95% do <i>gap</i> de otimalidade tradicional com Sorteio QMCA.....	215
Figura 75 - IC de 95% do <i>gap</i> de otimalidade em valores percentuais - MC.....	216
Figura 76 - IC de 95% do <i>gap</i> de otimalidade em valores percentuais - LHS.....	216
Figura 77 - IC de 95% do <i>gap</i> de otimalidade em valores percentuais - QMCA.....	216
Figura 78 - IC de 95% do <i>gap</i> de otimalidade alternativo com Sorteio MC.....	217
Figura 79 - IC de 95% do <i>gap</i> de otimalidade alternativo com Sorteio LHS.....	218
Figura 80 - IC de 95% do <i>gap</i> de otimalidade alternativo com Sorteio QMCA.....	218
Figura 81 - Limites Inferior e Superior no caso com Variável de Estado.	220
Figura 82 - Limites Inferior e Superior no caso com Mudança de Probabilidade.....	221
Figura 83 - Limite Inferior no caso com 60 estágios.....	223
Figura 84 - Valor esperado da Energia armazenada total (60 Estágios)...	223
Figura 85 - Probabilidade de risco de déficit anual (60 Estágios).....	224
Figura 86 - Energia Esperada Não Suprida total (60 Estágios).....	225
Figura 87 - Valor esperado da Geração Termelétrica total (60 Estágios).	225
Figura 88 - Custo esperado de operação e desvio padrão (60 Estágios). .	226
Figura 89 - Número de violações no Subsistema S (60 Estágios).....	227
Figura 90 - Número de violações da CAR no Subsistema NE (60 Estágios).....	227
Figura 91 - CMO médio para o Subsistema SE/CO (60 Estágios).....	228
Figura 92 - Limite inferior no caso com 120 estágios.....	229

Figura 93 - Valor esperado da Energia armazenada total (120 Estágios).	230
Figura 94 - Probabilidade de risco de déficit anual (120 Estágios).....	231
Figura 95 - Energia Esperada Não Suprida total (120 Estágios).....	231
Figura 96 - Valor esperado da Geração Termelétrica total (120 Estágios).....	232
Figura 97 - Custo esperado de operação e desvio padrão (120 Estágios).	232
Figura 98 - Número de violações no Subsistema S (120 Estágios).....	233
Figura 99 - Número de violações da CAR no Subsistema NE (120 Estágios).....	233
Figura 100 - CMO médio para o Subsistema SE/CO (120 Estágios).	234
Figura 101 - Energia armazenada total média - Nível CVaR.....	235
Figura 102 - Custo esperado de operação por estágio - Nível CVaR.....	236
Figura 103 - Geração termelétrica total média - Nível de CVaR.	236
Figura 104 - Risco de déficit anual - Nível de CVaR.	237
Figura 105 - Custo esperado de operação e Desvio Padrão - Nível de CVaR.	237
Figura 106 - Energia total armazenada média, na análise da condição crítica.	239
Figura 107 - Geração Termelétrica, na análise da condição crítica.	239
Figura 108 - Custo Marginal de Operação médio do SE/CO, na análise da condição crítica.	240
Figura 109 - Custo esperado de operação por estágio, na análise da condição crítica.	240
Figura 110 - Custo esperado de operação e desvio padrão, na análise da condição crítica.	241
Figura 111 - Risco de déficit, na análise da condição crítica.	241
Figura 112 - Risco de déficit acima de 5% da demanda, na análise da condição crítica.	242
Figura A.1 - Teste de Hipótese Unilateral à Esquerda.	253
Figura A.2 - Teste de Hipótese Unilateral à Direita.....	253
Figura A.3 - Teste de Hipótese Bilateral.....	254
Figura A.4 - Teste de Hipótese Unilateral à Esquerda para uma amostra maior.	255

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Relação de atributos dos REEs.....	83
Tabela 2 - R-Quadrado da aproximação linear.....	142
Tabela 3 - Definição do Nível de Dominância dos Cortes de Benders. 166	
Tabela 4 - Distribuição de UHEs e UTEs nos subsistemas.....	182
Tabela 5 - Limites de intercâmbios (MWmédio) entre os subsistemas para Janeiro/2009.....	183
Tabela 6 - Demanda de energia (MWmédio) dos subsistemas.....	183
Tabela 7 - Profundidade e custo dos patamares de déficit para cada subsistema para Janeiro/2009.....	184
Tabela 8 - Parâmetros dos patamares de carga para Janeiro/2009.....	184
Tabela 9 - Energia afluentes (MWmês) dos meses anteriores ao início do estudo.....	184
Tabela 10 - Estudo de casos para Validação do Modelo e Análise das Não-Linearidades.....	186
Tabela 11 - Piores resultados em cada caso de Validação do Modelo e Análise das Não Linearidades.....	191
Tabela 12 - Configuração dos casos para validação do Nó Fantasma.....	192
Tabela 13 - Distribuição de UHEs e UTEs nos subsistemas.....	196
Tabela 14 - Limites de intercâmbios (MWmédio) entre os subsistemas para Janeiro/2012.....	196
Tabela 15 - Demanda de energia (MWmédio) dos subsistemas.....	196
Tabela 16 - Profundidade e custo dos patamares de déficit para cada subsistema para Janeiro/2012.....	197
Tabela 17 - Parâmetros dos patamares de carga para Janeiro/2012.....	197
Tabela 18 - Energia afluentes (MWmês) dos meses anteriores ao início do estudo.....	198
Tabela 19 - Casos para análise de desempenho da PDDE.....	199
Tabela 20 - Limites Inferior e Superior com Variável de Estado (10^9 R\$) 220	
Tabela 21 - Estudos de casos para análise das metodologias de aversão a risco.....	222
Tabela 22 - Casos para comparação dos níveis de CVaR.....	234
Tabela A.1 - Tabela de erros para o teste de hipótese.....	252

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ANEEL	: Agência Nacional de Energia Elétrica
ARP	: Modelo AutoRegressivo Periódico
ARP(p)	: Modelo AutoRegressivo Periódico de ordem p
CCEE	: Câmara de Comercialização de Energia Elétrica
CEPEL	: Centro de Pesquisas de Energia Elétrica
CMO	: Custo Marginal de Operação
CVaR	: Conditional Value-at-Risk
DA	: Decomposição Aninhada
EENS	: Energia Esperada Não Suprida
FAC	: Função de Auto-Correlação
FACP	: Função de Auto-Correlação Parcial
FCI	: Função de Custo Imediato
FCF	: Função de Custo Futuro
FDP	: Função de Densidade de Probabilidade
FR	: Função Recurso
IC	: Intervalo de Confiança
iid	: independente e identicamente distribuída
LHS	: Latin Hypercube Sampling
MC	: Monte Carlo
MCR	: Medida Coerente de Risco
MOO	: Modelagem Orientada a Objetos
NE	: Subsistema Nordeste
N	: Subsistema Norte
ONS	: Operador Nacional do Sistema Elétrico
PCH	: Pequenas Centrais Hidrelétricas
PDDE	: Programação Dinâmica Dual Estocástica
PDO	: Programação Diária da Operação Eletroenergética
PEN	: Planejamento Anual da Operação Energética
PL	: problema de Programação Linear
PEL-2	: problema de Programação Linear Estocástica para 2 estágios
PEL-T	: problema de Programação Linear Estocástica para T estágios
PMO	: Programa Mensal da Operação Energética
POE	: Planejamento da Operação Energética
QMC	: Quase Monte Carlo
QMCA	: Quase Monte Carlo Aleatório
REE	: Reservatório Equivalente de Energia
SAA	: Sample Average Approximation (Aproximação pela média amostral)

SEB : Setor Elétrico Brasileiro
SEE : Sistema de Energia Elétrica
SE/CO : Subsistema Sudeste/Centro-Oeste
S : Subsistema Sul
SIN : Sistema Interligado Nacional
SSE : SubSistema Elétrico
UHE : Usina Hidrelétrica
UTE : Usina Termelétrica
VaR : Value-at-Risk

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO.....	27
1.1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	31
1.2	OBJETIVO	36
1.2.1	Objetivos Específicos	37
1.3	ESTRUTURA DA TESE.....	38
2.	OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA.....	41
2.1	CONCEITOS INICIAIS	42
2.2	PROBLEMA DE DOIS ESTÁGIOS	47
2.3	PROBLEMA MULTIESTÁGIO	49
2.4	CONSTRUÇÃO DA ÁRVORE DE CENÁRIOS	51
2.5	ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO	56
2.5.1	Decomposição Aninhada	58
2.5.1.1	Decomposição Aninhada para T estágios.....	63
2.5.2	Programação Dinâmica Dual Estocástica	66
2.6	AVALIANDO CANDIDATOS À SOLUÇÃO	74
2.6.1	Exemplo do Problema do Estoque.....	77
2.7	CONCLUSÃO	78
3.	PLANEJAMENTO ANUAL DA OPERAÇÃO ENERGÉTICA	81
3.1	RESERVATÓRIO EQUIVALENTE DE ENERGIA.....	82
3.1.1	Energia Armazenável Máxima	84
3.1.2	Energia Afluente	86
3.1.2.1	Energia Controlável	87
3.1.2.2	Correção da Energia Controlável.....	87
3.1.2.3	Energia Fio D'Água.....	90
3.1.2.4	Perdas de Energia Fio D'Água por Limitação de Turbinamento	92
3.1.3	Separação da Energia Controlável da Energia Afluente	94
3.1.4	Energia de Vazão Mínima.....	95
3.1.5	Energia Evaporada	96
3.1.6	Geração Hidráulica Máxima.....	97

3.1.7	Geração de Pequenas Usinas.....	99
3.1.8	Energia Armazenável Máxima por Volume de Espera	99
3.1.9	Energia Armazenável Mínima por Limites Operativos	100
3.1.10	Energia de Volume Morto.....	100
3.1.11	Energia de Usinas Submotorizadas.....	101
3.1.12	Energia de Desvio	102
3.1.12.1	Energia de Desvio Controlável	102
3.1.12.2	Energia de Desvio Fio d'água.....	103
3.1.13	Configuração Hidrelétrica	103
3.1.13.1	Correção da Energia Armazenada.....	104
3.1.14	Cascatas com diferentes REEs.....	106
3.1.14.1	Uso de usinas hidrelétricas fictícias	107
3.1.14.2	Considerar os diferentes REEs no cálculo	109
3.2	MODELO PARA GERAÇÃO DA ÁRVORE DE CENÁRIOS	110
3.2.1	Identificação da ordem.....	115
3.2.2	Estimação dos parâmetros	118
3.2.3	Correlação Espacial.....	119
3.2.4	Geração das Séries Sintéticas.....	121
3.2.5	Geração da Árvore de Cenários	122
3.3	FORMULAÇÃO DO PEN	123
3.3.1	Patamares de carga.....	126
3.3.2	Modelo ARP(p).....	128
3.3.3	Formulação Completa	131
3.4	PDDE NO PEN.....	132
3.5	ASPECTOS PROBLEMÁTICOS DA MODELAGEM.....	137
3.5.1	REE	137
3.5.2	Modelo ARP(p).....	138
3.6	CONCLUSÃO.....	139
4.	CONTRIBUIÇÕES APLICADAS AO PEN	141
4.1	MODELAGEM DO PEN	141

4.1.1	Correção do REE	141
4.1.2	Geração alternativa da árvore de cenários	142
4.1.2.1	Modelo AutoRegressivo Periódico Modificado	142
4.1.2.2	Modelo Independente.....	144
4.1.3	Nó fantasma.....	145
4.1.4	Variável de folga no Balanço Energético	146
4.2	TÉCNICAS DE AMOSTRAGEM	147
4.2.1	Quasi Monte Carlo.....	148
4.2.2	Latin Hypercube Sampling	150
4.2.3	Aplicação do QMCA e LHS no PEN	152
4.3	CRITÉRIO DE PARADA DA PDDE	153
4.4	AVALIAÇÃO DA QUALIDADE DA POLÍTICA	155
4.4.1	Cálculo do Limite Superior	156
4.4.2	Cálculo do Limite Inferior	157
4.4.3	Construção do Intervalo de Confiança para o <i>gap</i>	159
4.5	ESTRATÉGIAS DE SOLUÇÃO DA PDDE.....	160
4.5.1	Um cenário por recursão.....	160
4.5.2	Incrementando cenários por recursão.....	163
4.6	SELEÇÃO DE CORTES	164
4.6.1	Manter os últimos <i>C</i> cortes.....	165
4.6.2	Nível de dominância.....	165
4.6.3	Seleção dinâmica	167
4.7	AVERSÃO A RISCO	169
4.7.1	MCR com o VaR como variável de estado.....	172
4.7.2	MCR com Mudança na Distribuição de Probabilidade.....	176
4.8	CONCLUSÃO	179
5.	RESULTADOS COMPUTACIONAIS.....	181
5.1	SISTEMA HIDROTÉRMICO – JANEIRO/2009	181
5.2	ESTUDOS DE CASOS – JANEIRO/2009.....	185
5.2.1	Validação do Modelo e Análise das não-linearidades	185

5.2.2	Validação do nó fantasma	192
5.3	SISTEMA HIDROTÉRMICO – JANEIRO/2012	195
5.4	ESTUDOS DE CASOS – JANEIRO/2012	198
5.4.1	Melhoria do desempenho da PDDE	199
5.4.2	Avaliação da Política de Operação	209
5.4.3	Modelo com Aversão a Risco	219
5.4.3.1	Aversão a Risco – Pequeno porte	219
5.4.3.2	Aversão a Risco – 60 Estágios	222
5.4.3.3	Aversão a Risco – 120 Estágios	228
5.4.3.4	Comparação para diferentes níveis de CVaR	234
5.4.3.5	Aversão a risco em uma condição crítica	238
5.5	CONCLUSÃO	242
6.	CONCLUSÃO	247
6.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	248
APÊNDICE A. TESTE DE HIPÓTESES		251
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS		257

1. INTRODUÇÃO

O Sistema Elétrico Brasileiro (SEB) pode ser classificado como um sistema hidrotérmico com predominância hidrelétrica, uma vez que o mesmo é composto por usinas hidrelétricas e termelétricas, sendo que as primeiras são responsáveis por aproximadamente 75% da capacidade instalada de geração de energia elétrica no Brasil (ANEEL, 2009). Em Sistemas de Energia Elétrica (SEE) com predominância de recursos hídricos, o problema do Planejamento da Operação Energética (POE) é uma tarefa bastante complexa de ser realizada. Nesse sentido, devido às complexidades associadas a esse problema, uma estratégia comumente adotada para viabilizar a sua solução é baseada na divisão do problema em subproblemas (etapas), com diferentes horizontes de planejamento e detalhes de modelagem do sistema. No caso Brasileiro, são definidas três etapas de planejamento (PEREIRA e PINTO, 1982), as quais atualmente são denominadas de:

- 1) Planejamento Anual da Operação Energética - PEN;
- 2) Programa Mensal da Operação Energética - PMO;
- 3) Programação Diária da Operação Eletroenergética - PDO.

Este trabalho tem como foco a primeira etapa do planejamento, i.e. o PEN, que também é denominado de planejamento de médio-prazo. Como o PEN é apenas a primeira etapa do POE, faz-se necessário que o PEN forneça informações para o próximo subproblema de maneira a acoplar as decisões tomadas na primeira e segunda etapa. O acoplamento dos respectivos subproblemas é feito por meio de uma política de operação, na qual para uma dada decisão operativa do PMO se tem o custo esperado da operação no horizonte do PEN. É importante destacar que atualmente a política de operação utilizada como condição de final do PMO não é fornecida pelo PEN, mas utilizam-se dois modelos computacionais, em que um deles é o mesmo que é usado no PEN. Dessa forma, ao longo deste documento, quando nos referirmos ao PEN focamos no modelo computacional dessa etapa, sendo que o PEN é uma etapa de planejamento mais ampla que envolve outros aspectos.

Assim, na segunda etapa de planejamento (PMO) pode-se otimizar o uso dos recursos considerando o período total de planejamento do PEN, porém com mais detalhes na modelagem do problema. As etapas 2 e 3 não serão discutidas nesse documento, sendo que mais detalhes sobre as mesmas podem ser encontrados em (PEREIRA e PINTO, 1985; DOS SANTOS *et al.*, 2008; DOS SANTOS *et al.*, 2009; GONÇALVES *et al.*, 2011; GONÇALVES *et al.*, 2012) e

(PEREIRA e PINTO, 1982; FINARDI e DA SILVA, 2005; 2006; RODRIGUES, 2009), respectivamente.

No PEN tem-se como objetivo estabelecer estratégia (política de operação) para a operação hidrotérmica por meio da análise das condições de atendimento ao mercado de energia e demanda no horizonte de estudo (ONS, 2009). Nesse contexto, as estratégias devem minimizar o custo esperado de operação no horizonte de estudo, que é composto pelo custo de operação das Usinas Termelétricas (UTES) e por penalidades econômicas pelo não suprimento da carga, isto é, o déficit de energia.

Uma vez que o horizonte associado ao PEN é de cinco anos acrescidos de cinco anos de pós-operação, existem incertezas associadas a informações, como a demanda, a afluência e o custo incremental das UTES no futuro. Entretanto, no PEN apenas a afluência é considerada incerta e, portanto, as demais variáveis, como a demanda e o custo incremental das UTES são consideradas conhecidas para todo o horizonte de estudo. Isto porque, ao considerar as demais incertezas, a complexidade do problema torna-se maior, podendo inviabilizar computacionalmente sua resolução.

Como será discutido em mais detalhes ao longo deste documento, o PEN é representado matematicamente por um problema de programação linear estocástico de grande porte, com acoplamento temporal e espacial. O acoplamento temporal ocorre devido à significativa participação das Usinas Hidrelétricas (UHEs), nas quais a disponibilidade futura de energia depende da operação do reservatório e das afluências futuras, já que os reservatórios têm capacidade limitada de armazenamento (SILVA, 2001). O acoplamento espacial decorre, por exemplo, do fato do despacho de uma UHE afetar o despacho das UHEs que estão a jusante na cascata.

Este trabalho considera que nessa etapa de planejamento a representação da característica estocástica é mais importante do que a modelagem das não linearidades associadas à função de produção hidrelétrica e aos custos de geração das usinas termelétricas. Consequentemente, optou-se por utilizar um modelo linear com variáveis contínuas para permitir um detalhamento maior do modelo estocástico na representação das incertezas consideradas.

Além disso, devido à grande quantidade de UHEs, do número de estágios de tempo e da característica estocástica, este é um problema de grande porte que exige algumas simplificações para viabilizar a solução do mesmo. Nesse sentido, uma estratégia usada no PEN é a representação por Reservatórios Equivalentes de Energia (REE)

(ARVANITIDIS e ROSING, 1970a; b), que agrega as UHEs de acordo com alguma característica comum, como, por exemplo, um perfil hidrológico similar. Atualmente, as usinas são agregadas em REEs por SubSistema Elétrico (SSE), isto é, usinas que estão conectadas no mesmo SSE. Um SSE é definido por uma região elétrica em que as restrições de transmissão não são atingidas de maneira relevante, tanto na ocorrência quanto na duração. Atualmente no Brasil, os SSEs são: Sul (S), Sudeste/Centro-Oeste (SE/CO), Norte (N) e Nordeste (NE).

Dessa forma, devido às características supracitadas, o PEN é um problema bastante complexo que necessita de técnicas de programação estocástica para encontrar uma solução numérica de boa qualidade. Existem inúmeras estratégias para resolver um problema de programação estocástica, sendo que a grande maioria faz uso de uma árvore de cenários, visto que em geral é inviável resolver o problema considerando todo o espaço amostral que é definido pelas Funções de Densidade de Probabilidade (FDPs) das afluições, que são as variáveis aleatórias do PEN. Assim, a árvore de cenários é uma aproximação do problema descrito pelas FDPs que modelam as afluições.

No PEN, a geração da árvore de cenários é feita por um modelo AutoRegressivo Periódico de ordem p (ARP(p)) com base no histórico de afluições mensais, que segundo Noakes *et al.* (1985) é o modelo mais adequado para gerar possíveis realizações mensais¹ de afluições. O modelo ARP(p) usa informações de p meses anteriores e um resíduo para gerar possíveis realizações de afluição no mês em estudo. Como as informações dos meses anteriores são definidas a priori, tem-se que a aleatoriedade das afluições ocorre devido ao resíduo, que é sorteado da FDP que o descreve.

Para fazer o sorteio do resíduo são usadas técnicas de amostragem, ou seja, metodologias que buscam representar da melhor maneira possível a função densidade de probabilidade original. Dentre as principais técnicas destaca-se o método de Monte Carlo (MC) como uma das mais utilizadas em problemas de programação estocástica, na qual as amostras são independentes e identicamente distribuídas (iid). No entanto, existem outras técnicas que objetivam uma representação melhor que o método de MC, tais como o Quasi Monte Carlo Aleatório (QMCA) e o Latin Hypercube Sampling (LHS).

¹ No PEN o horizonte de estudo é dividido em estágios mensais, isto é, toma-se uma decisão para cada mês do estudo e, por isso, é necessário fazer a geração das possíveis realizações de afluições para cada um dos meses.

Apesar da redução do tamanho do problema por meio dos REEs, o problema a ser resolvido ainda é computacionalmente inviável devido ao tamanho da árvore de cenários. Por exemplo, nas configurações atuais do PEN, com 20 aberturas, i.e. possibilidades de afluições por mês, e 10 anos de horizonte, tem-se uma árvore com mais de $1,3 \cdot 10^{156}$ cenários (20^{120}). Nesse sentido, neste trabalho optou-se por utilizar a Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE), que foi proposta por (PEREIRA e PINTO, 1991), com base na decomposição de Benders (BENDERS, 1962), para resolver o problema de otimização estocástica associado à árvore de cenários. Na PDDE, ao invés de resolver o problema completo da árvore de cenários, é realizada uma amostragem dos cenários usando Monte Carlo, a cada iteração, de maneira a reduzir o tamanho do problema e viabilizar a obtenção de uma solução de boa qualidade. Neste trabalho as técnicas QMCA e LHS serão analisadas como alternativas metodológicas, também, para o sorteio da árvore de cenários.

Ao final do processo de otimização, tem-se que a PDDE fornece uma solução de boa qualidade para um problema aproximado, uma vez que o problema original composto pela FDP original foi aproximado por meio de uma árvore de cenários. Dessa forma, faz-se necessário avaliar a qualidade desta solução perante o problema original, que é equivalente a avaliar a qualidade da política de operação. As metodologias para a avaliação da qualidade da política de operação, como aquela discutida em (SHAPIRO e PHILPOTT, 2009), requerem um elevado tempo computacional, o que pode inviabilizar a aplicação no PEN. Nesse sentido, este trabalho analisará uma estratégia alternativa a discutida por MORTON, 2009, que reduz significativamente o tempo computacional exigido, embora tenha um nível de precisão inferior. Essa alternativa foi discutida anteriormente por (BAYRAKSAN e MORTON, 2006), para um problema de dois estágios.

De maneira a encontrar políticas de melhor qualidade em tempos computacionais cada vez menores, torna-se essencial estudar metodologias para melhorar o desempenho da PDDE. Nesse sentido, este trabalho analisará estratégias de solução da PDDE que foram discutidas em (PHILPOTT e GUAN, 2008; DE MATOS *et al.*, 2011; SHAPIRO *et al.*, 2011); essas metodologias focam em alternativas para percorrer os cenários ao longo do processo iterativo. Adicionalmente, analisam-se estratégias de seleção de cortes de Benders, visto que o tempo computacional cresce com o número de iterações devido a quantidade de cortes. Assim, ao selecionar apenas um conjunto restrito de cortes diminui-se o tempo computacional. Por outro lado, deve-se

estar atento à qualidade da solução encontrada que pode ser muito pobre dependendo da metodologia utilizada para selecionar os cortes.

Em problemas como o PEN, no qual tomam-se decisões para um total de 10 anos de horizonte, as incertezas acerca da disponibilidade futura de energia (água) pode ser bastante elevada, deseja-se construir políticas operativas que não só tomem a melhor decisão em termos de valor esperado, mas que protejam o sistema dos cenários mais críticos. Isto porque, apesar de a decisão pelo valor esperado ser eficiente economicamente, se aceita a possibilidade de ocorrência de déficit, o que é indesejável por questões políticas, econômicas e sociais. Assim, é interessante construir uma política de operação com um determinado nível de aversão a risco, que será um pouco mais cara em média, mas será mais segura em termos de atendimento ao mercado de energia. Nesse sentido, este trabalho analisará uma metodologia de aversão a risco na qual substitui-se a métrica do valor esperado de operação por uma Medida Coerente de Risco (MCR), conforme discutida em (SHAPIRO, 2011; PHILPOTT e DE MATOS, 2012).

Apesar dos vários modelos propostos para resolver o problema do PEN, muitos modelos (SHERKAT *et al.*, 1985; JACOBS *et al.*, 1995; ESCUDERO *et al.*, 1996; ARCHIBALD *et al.*, 2001; CASTRO e GONZÁLEZ, 2004) não consideram características específicas do SEB. Por outro lado, nenhuma das implementações computacionais dos modelos desenvolvidos no Brasil (SOARES e CARNEIRO, 1991; MACEIRA *et al.*, 1998; PEREIRA *et al.*, 1999) está disponível para pesquisa, uma vez que todas são protegidas comercialmente (*copyright*). Nesse sentido, este trabalho se propõe, também, a desenvolver um modelo de otimização estocástica para ser usado pelo grupo de pesquisa, com base nos conceitos utilizados no modelo oficial do SEB (CEPEL, 2001). Este modelo será denominado de SMERA (Stochastic Model for Energy Resource Allocation).

Na sequência faz-se uma revisão bibliográfica do problema do PEN, com foco principal nos trabalhos desenvolvidos no Brasil devido às características únicas do problema Brasileiro. Em seguida são apresentados os objetivos geral e específicos deste trabalho. Por fim, apresenta-se a estrutura deste documento, com uma breve descrição dos capítulos que o compõem.

1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Esta seção é dedicada à revisão bibliográfica do PEN, que devido às características peculiares do problema terá como foco principal as

contribuições científicas originadas no Brasil, mas considerando, também, o universo de contribuições internacionais.

Inicialmente, Pereira e Pinto (1982) apresentam uma descrição hierárquica do planejamento da operação energética no Brasil; no entanto, neste trabalho discutem-se soluções apenas para o modelo da programação diária. Em Pereira e Pinto (1983), o foco é o planejamento da operação energética de curto-prazo (PMO), sendo que este artigo já apresenta uma proposta de estratégia de solução baseada na decomposição por Benders. Em (1985) os mesmos autores generalizam essa metodologia para problemas com horizontes semanais e mensais. Por sua vez, em (1991) Pereira e Pinto apresentam a Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE) aplicada a um problema com múltiplos estágios, relacionado com o planejamento de sistemas de energia, como o PEN. Os modelos apresentados nesses artigos foram aplicados a um sistema composto pelas usinas dos SSEs SE/CO e S, sendo que as UHEs foram modeladas individualmente e as UTEs foram agregadas em classes térmicas com custo incremental equivalente. Nos dois primeiros documentos o processo estocástico foi representado de forma simplificada, na qual as afluições foram diretamente sorteadas da função de densidade de probabilidade, em todos os casos estudados, enquanto que nos dois últimos eles utilizaram um modelo ARP(1).

Em (1992) Kligerman aplicou a estratégia da PDDE para o planejamento de médio-prazo (equivalente ao problema atual do PEN) considerando que a representação do SIN é dada por dois REEs (Subsistemas SE/CO e S) e que o modelo estocástico não tem correlação temporal, embora no corpo do texto tenha apresentado o modelo AutoRegressivo Periódico de ordem 1 (PEREIRA *et al.*, 1984). De acordo com Kligerman (1992) o modelo a reservatório equivalente foi baseado em (ARVANITIDIS e ROSING, 1970a; b), que é utilizado no Brasil desde 1972.

No modelo a reservatório equivalente utilizado por Kligerman (1992), considera-se que os reservatórios estão operando em paralelo. Nesse sentido, (SOARES e CARNEIRO, 1993) e (CRUZ e SOARES, 1996) apresentam outras regras de operação para o cálculo dos REEs que, de acordo com os autores, são mais eficientes para modelar a operação das usinas agregadas no REE.

No Brasil destacam-se também as contribuições do Laboratório de Sistemas Hidrotérmicos do Departamento de Engenharia de Sistemas da UNICAMP (Universidade Estadual de Campinas) ao problema de planejamento hidrotérmico. Na etapa do PEN muitos trabalhos focam em modelos determinísticos, na modelagem não linear ou na solução

dos problemas estocásticos por métodos alternativos à metodologia atual. Dentre os trabalhos destacam-se: (MARTINEZ e SOARES, 2002; 2004; MARQUES *et al.*, 2005; 2006; SIQUEIRA *et al.*, 2006; MARTINS *et al.*, 2009; ZAMBELLI *et al.*, 2009; ZAMBELLI e SOARES, 2009).

O primeiro trabalho do LabPlan (Laboratório de Planejamento de Sistemas de Energia Elétrica) com foco no PEN foi desenvolvido por Finardi (1999), que aplicou a PDDE à uma configuração hidrotérmica reduzida do SIN com as usinas hidrelétricas representadas de forma individualizada. Nesse trabalho foi verificado um elevado tempo computacional o qual foi reduzido utilizando-se técnicas de processamento paralelo. Devido às características da metodologia de solução, o problema apresentou uma granularidade grossa², o que garantiu uma eficiência computacional na ordem de até 80%, redução do tempo em torno de 0,8 multiplicado pelo número de processadores, isto é, dois processadores reduziram o tempo de processamento em 1,6 vezes. Embora o sistema hidrelétrico esteja bem detalhado, diversas simplificações foram realizadas, destacando-se a representação do processo estocástico das afluições com base em um modelo uniforme e com independência entre os estágios.

Carvalho (2002) comparou a representação por UHEs individualizadas e por REE, sendo que a primeira apresentou resultados com maior interesse prático e a segunda resultou em um menor tempo computacional. No entanto, neste trabalho utilizou-se um sistema reduzido com apenas 15 UHEs, bem como um modelo a REE bastante simplificado. Não foram consideradas características como a correção da energia controlável, perdas de energia fio d'água, mudanças de configurações hidrelétricas, entre outras que serão detalhadas no Capítulo 3 desta tese. Além disso, a série de afluições utilizada para otimizar o problema foi sorteada diretamente do histórico, ou seja, não foi utilizado um modelo $ARP(p)$.

Dos Santos (2004) utilizou a Modelagem Orientada a Objetos (MOO) para implementar o problema do PEN. Nesse trabalho manteve-se a formulação de REE usada em (CARVALHO, 2002); porém, foram consideradas 92 usinas hidrelétricas, as quais foram agregadas em quatro REEs, referentes ao número de SSEs, e 11 REEs, relativo às bacias hidrográficas. Assim, observou-se que a MOO não compromete o

² Problemas com granularidade grossa são aqueles que quando se utiliza processamento paralelo requerem pouca comunicação entre os processos, isto é, a carga de processamento é superior do que as informações a serem compartilhadas.

desempenho computacional e permite uma maior modularidade ao programa. Além disso, de acordo com (DOS SANTOS, 2004), verificou-se que a representação por bacia teve um custo computacional 3,5 vezes maior do que por subsistemas e, ainda, apresentou resultados com um custo 4% maior que no caso da representação por SSE.

Garcia (2005) adicionou ao problema implementado em (DOS SANTOS, 2004) o modelo AutoRegressivo Periódico de ordem p , mantendo a modelagem a REE e agregando as usinas por SSEs. O modelo ARP(p) foi construído considerando uma série histórica de energia afluenta transformada e, conseqüentemente, fez-se necessária uma transformação inversa na série sintética. Neste trabalho foi apresentado que este modelo ARP(p) reproduz as características estatísticas e periódicas do histórico.

De Matos (2008) desenvolveu uma plataforma computacional para os estudos do PEN, em que considerou o Sistema Interligado Nacional (SIN) em conjunto com quase todos os atributos que descrevem o PEN agregando as usinas por SSEs ou por cascata. Além disso, utilizou os dois modelos ARP(p) discutidos em (GARCIA, 2005) e (CEPEL, 2001), considerando a Energia Afluenta como variável de estado. Adicionalmente, foram encontrados alguns aspectos problemáticos na modelagem que são alvo de estudo neste documento.

No âmbito das contribuições originadas fora do Brasil destacam-se alguns estudos de planejamento de longo prazo. Sherkat *et al.* (1985) discutem um problema em que as usinas hidrelétricas são agregadas em reservatórios equivalentes e as afluições são modeladas segundo um modelo ARP(1). Neste trabalho, Sherkat *et al.* (1985) utilizaram um algoritmo de Programação Dinâmica Estocástica com aproximações sucessivas para contornar a dificuldade da maldição da dimensionalidade. Apesar dos bons tempos computacionais para 60 usinas termelétricas e 35 hidrelétricas, o algoritmo considera poucos cenários de afluição.

Em (1995), Jacobs *et al.* desenvolveram um programa, denominado SOCRATES, para fazer a operação das usinas hidrelétricas em um horizonte de até dois anos para a empresa PG&E (Pacific Gas & Electricity). O SOCRATES considera o problema associado às necessidades de despacho da PG&E, considerando quatro patamares de carga. Para resolver o problema foi utilizada a Decomposição Aninhada com algumas melhorias como, por exemplo, partida quente e múltiplos cortes.

Lamond *et al.* (1995) estudaram a operação de um único reservatório considerando que as afluições eram estocásticas. O

problema foi modelado como um processo de Markov contínuo e estacionário com horizonte infinito. Devido a dificuldades em resolver o problema, Lamond *et al.* (1995) propuseram uma linearização da função de Markov com base em informações acerca da política de operação. Em (2001), o trabalho de Archibald *et al.* foi uma extensão do conceito de (LAMOND *et al.*, 1995) para um caso multirreservatório, porém não foram apresentados os resultados do algoritmo.

Escudero *et al.* (1996) consideraram um modelo baseado em análise de cenários para fazer o estudo do planejamento de médio e curto prazos, sendo que o problema foi resolvido com uma técnica de decomposição de cenários conhecida como Lagrangeano Aumentado. No entanto, o problema foi composto apenas pelo parque hidráulico (sem considerar termelétricas) e tem como objetivo maximizar a produção hidráulica.

O uso de inteligência artificial é uma estratégia alternativa para resolver problemas complexos como é o caso PEN. Nesse sentido, Mantawy *et al.* (2003) propuseram o uso da Busca Tabu para resolver o problema, considerando uma modelagem não-linear com o objetivo de maximizar o benefício da água. De acordo com os autores, a Busca Tabu foi mais eficiente que métodos de otimização clássicos e outras técnicas de inteligência artificial. Entretanto, no artigo foi considerado um sistema com apenas quatro reservatórios e não foram descritas quais as não-linearidades que foram modeladas, bem como não foi mencionado o requisito de atender uma determinada demanda.

Castro e González (2004) desenvolveram um modelo de otimização não linear denominado de HTCOOR, que considera as não linearidades das usinas hidrelétricas e termelétricas. Neste modelo todas as variáveis de decisão hidrelétrica e as afluências são consideradas estocásticas, sendo que a FDP é discretizada em um determinado número de blocos. De acordo com o artigo, o modelo é utilizado para horizontes de até dois anos e foi desenvolvido para ser utilizado por companhias de energia elétrica na Espanha, com intuito de definirem a operação das suas usinas, sem levar em consideração o sistema completo.

Isto posto, é importante destacar que, até o momento deste estudo apesar de haver estudos que discutem uma estratégia de amostragem seletiva (JARDIM *et al.*, 2001; DA COSTA *et al.*, 2006; OLIVEIRA, 2007; PENNA *et al.*, 2011), não foram encontradas referências que discutem o uso do QMCA e LHS no PEN, bem como a análise da qualidade da política de operação fornecida pelo PEN. Por esse motivo, são apresentados resumidamente alguns trabalhos internacionais que são

muito relevantes e, mesmo que não sejam aplicados diretamente a um problema como o PEN, os artigos discutem alguns aspectos importantes de modelagem e estratégias de solução.

Em relação às técnicas de amostragem, destacam-se os trabalhos de (NIEDERREITER, 1992; FRIEDEL e KELLER, 2000; L'ECUYER e LEMIEUX, 2005; DREW e HOMEM-DE-MELLO, 2006; HOMEM-DE-MELLO, 2008) que discutem o QMC e (BAILEY *et al.*, 1999; MCKAY *et al.*, 2000; FREIMER *et al.*, 2005) que focam no LHS. A estratégia para avaliação da qualidade da solução encontrada pela resolução do problema estocástico é discutida por (RUSZCZYNSKI e SHAPIRO, 2003; CHIRALAKSANAKUL e MORTON, 2004; BAYRAKSAN e MORTON, 2006; SHAPIRO e PHILPOTT, 2009).

Além disso, Arvanitidis e Rosing (1970a; b) apresentaram uma discussão de modelos equivalentes de energia para substituir as usinas hidrelétricas. Já Hipel e McLeod (1994) discutem em seu livro algumas metodologias para modelagem de séries temporais e previsões de afluência. Noakes *et al.* (1985) mostra que o modelo $ARP(p)$ é o mais adequado para previsões de afluências mensais. Por sua vez, Chiralaksanakul (2003) discute estratégias de solução para problemas estocásticos para T estágios com sorteio de MC, no qual a PDDE se inclui. Philpott e Guan (2008) apresentam as condições necessárias para garantir a convergência com probabilidade 1 da PDDE e estratégias de soluções similares.

Destacam-se, também, trabalhos que analisaram estratégias para melhorar o desempenho da PDDE como (DE MATOS *et al.*, 2011; SHAPIRO *et al.*, 2011) e trabalhos em incluem a aversão a risco em problemas de otimização estocástica, como é o caso em (RUSZCZYNSKI, 2010; GUIGUES e SAGASTIZABAL, 2011; SHAPIRO, 2011; GUIGUES e ROMISCH, 2012; GUIGUES e SAGASTIZÁBAL, 2012; PHILPOTT e DE MATOS, 2012; SHAPIRO *et al.*, 2012).

Outros trabalhos importantes que discutem métodos e modelos que podem ser usados no PEN são: (INFANGER e MORTON, 1996; BIRGE e LOUVEAUX, 1997; DUPAČOVÁ *et al.*, 2000; WALLACE e FLETEN, 2003; HEITSCH e RÖMISCH, 2009; SHAPIRO *et al.*, 2009).

1.2 OBJETIVO

De maneira sucinta, este trabalho tem cinco contribuições principais, a saber:

1. Analisar técnicas de amostragem alternativas ao método de MC, que podem contribuir com uma representação mais próxima do problema real;
2. Avaliar a qualidade da política de operação, visto que esta análise é muito importante para determinar o quanto o decisor pode confiar na política obtida;
3. Melhorar o desempenho da PDDE por meio de estratégias de como percorrer os cenários ao longo do processo iterativo e selecionar cortes de Benders, uma vez que o aumento de desempenho possibilitará encontrar políticas de melhor qualidade e/ou melhorar a modelagem do problema;
4. Incluir uma metodologia de aversão a risco ao PEN, que forneça uma política operativa com maior segurança ao atendimento do mercado de energia;
5. Propor um modelo robusto para o PEN que considera as contribuições acima.

Na revisão bibliográfica discutida na seção anterior é possível verificar que os objetivos definidos acima são contribuições importantes deste trabalho ao problema do planejamento de médio prazo, uma vez que, apesar de alguns temas terem sido discutidos no âmbito da otimização estocástica, este trabalho aplica esses fundamentos ao PEN. Além disso, destaca que as metodologias e estratégias consideradas neste trabalho fazem parte do estado da arte de problemas de otimização estocástica multiestágio, como, por exemplo, a aversão a risco, a avaliação da qualidade da solução, a seleção de cortes, entre outros.

1.2.1 Objetivos Específicos

Apesar do método de MC ser uma técnica de amostragem bastante utilizada em problemas de otimização estocástica, existem algumas técnicas alternativas que permitem aproximar o problema real de uma maneira mais adequada. Este trabalho visa analisar duas técnicas de amostragem alternativas ao MC, que são o QMCA e o LHS.

A avaliação da qualidade da política de operação tem sido tema de muitas contribuições a problemas de programação estocástica. Ressalta-se que a estratégia sugerida por alguns autores (RUSZCZYNSKI e SHAPIRO, 2003; SHAPIRO e PHILPOTT, 2009) demanda um elevado tempo computacional, assim, será analisada uma estratégia alternativa. No caso do PEN, não se encontrou contribuição específica neste sentido, com isso, este trabalho contribui no sentido de

mostrar a importância dessa análise, bem como discutir duas estratégias para avaliar a qualidade da política de operação.

Ao longo dos estudos da modelagem e formulação do problema do PEN, deparou-se com algumas não linearidades na implementação atual do REE e no modelo $ARP(p)$. Essas não linearidades podem provocar não convexidades no problema do PEN, inviabilizando o uso da PDDE como estratégia de solução. Dessa forma, serão estudadas as dificuldades que as não linearidades podem causar na política de operação gerada pela PDDE, bem como algumas propostas de soluções para contornar as dificuldades encontradas.

O desempenho da PDDE afeta diretamente a qualidade da política de operação e a limitação da modelagem do problema, seja referente ao aumento do tamanho da árvore de cenários ou ao modelo das UHEs. Nesse sentido, este trabalho tem por objetivo propor e analisar estratégias que melhorem o desempenho da PDDE de maneira a possibilitar ganhos de modelagem e na qualidade da política de operação. Essas estratégias consistem em percorrer os cenários na PDDE de forma diferente da tradicional, bem como selecionar um conjunto de cortes de Benders que seja efetivo ao problema, mas não aumente significativamente o tamanho do problema de Programação Linear (PL).

Conforme foi comentado, atualmente o PEN toma as decisões com base no mínimo valor esperado para o custo de operação que, apesar de ser eficiente economicamente, não protege contra cenários críticos em que há ocorrência de déficit. Dessa forma, este trabalho analisa uma metodologia de aversão a risco na qual se busca minimizar uma MCR e, com isso, produzir uma política operativa mais segura.

Por fim, para o desenvolvimento deste trabalho fez-se necessário implementar um modelo de otimização estocástica para o PEN. Assim, o SMERA está sendo desenvolvido de forma a permitir ao usuário a consideração de diferentes alternativas de modelagem do PEN, bem como flexibilidade e opções para definir alguns parâmetros importantes na modelagem do PEN.

1.3 ESTRUTURA DA TESE

Inicialmente, no Capítulo 2, serão discutidos os conceitos de Otimização Estocástica que são relevantes para o desenvolvimento deste trabalho. Dentre esses conceitos, destacam-se a geração da árvore de cenários, os algoritmos de solução e a avaliação qualidade da solução.

No Capítulo 3 é apresentado o problema do Planejamento Anual da Operação Energética com foco na modelagem e estratégia de solução utilizada pelo SMERA, desenvolvido com base no modelo NEWAVE (MACEIRA *et al.*, 1998; CEPEL, 2001). Neste capítulo serão descritos detalhadamente os principais conceitos de modelagem do PEN: o Reservatório Equivalente de Energia (REE), o modelo AutoRegressivo Periódico de ordem p (ARP(p)) e a PDDE. Ao final do capítulo são destacados alguns aspectos problemáticos da modelagem atual.

Já no Capítulo 4 serão descritas as principais contribuições deste trabalho, com foco na aplicação ao problema do PEN, que são alternativas a modelos e estratégias usadas atualmente pelo modelo NEWAVE. As técnicas alternativas para a construção da árvore de cenários com sorteios utilizando Latin Hypercube Sampling (LHS) e Quasi Monte Carlo Aleatório (QMCA), metodologias para avaliar a qualidade da política de operação, estratégias para melhorar o desempenho da PDDE e a metodologia de aversão a risco são os principais destaques do capítulo.

No Capítulo 5 são apresentados e analisados estudos de casos para validar o modelo computacional desenvolvido ao longo deste trabalho. Além disso, busca-se ilustrar as dificuldades encontradas no modelo atual e as sugestões propostas que contornam as dificuldades mencionadas no Capítulo 3. Por fim, analisam-se as contribuições das alternativas propostas no Capítulo 4. Os estudos foram realizados considerando todo o Sistema Interligado Nacional (SIN).

Finalmente, o Capítulo 6 apresenta conclusões obtidas pelas análises teóricas e dos resultados no Capítulo 5, considerando os objetivos deste trabalho. Além disso, discutem-se sugestões de trabalhos futuros.

2. OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA

Os problemas de otimização podem ser separados, quanto à natureza dos dados em duas categorias: determinísticos e estocásticos. No primeiro caso, todos os dados são conhecidos no momento em que a decisão é tomada, enquanto que, no segundo, é necessário otimizar sob incertezas com relação aos dados do problema. Este capítulo aborda alguns conceitos básicos da otimização estocástica (otimização sob incerteza) e seu objetivo principal consiste em apresentar aspectos fundamentais que aparecem quando problemas de otimização são representados como modelos estocásticos. Apesar de problemas com natureza determinística serem mais simples quando comparados a casos estocásticos, problemas do mundo real quase sempre incluem dados que não são conhecidos no instante em que as decisões são tomadas. Quando se tem incerteza no valor desses dados, mas pode-se assumir que esse valor pertence a um conjunto de realizações possíveis, é possível buscar uma solução que seja viável e otimize (minimize ou maximize) uma função objetivo fornecida, considerando todas as realizações.

A inclusão de incertezas na modelagem pode ser feita por meio de variáveis aleatórias com uma Função de Densidade de Probabilidade (FDP) conhecida e/ou com restrições probabilísticas. No caso desta última, os problemas de otimização são conhecidos como *chance constraints* ou *probabilistic constraints* (SHAPIRO *et al.*, 2009); porém, essa classe de problemas não será estudada neste documento. A inclusão das incertezas em problemas de otimização cria muitas dificuldades, como por exemplo:

- Como representar as variáveis aleatórias no modelo?
- Como resolver o problema de otimização?
- Como medir a qualidade de uma solução obtida?

Nesse contexto, ao longo do texto serão discutidas algumas das abordagens que procuram responder (ou dar um sentido) às perguntas acima. Como estratégia, em uma parte inicial, será feito uso de uma classe muito importante de problemas de otimização estocástica: modelos de recurso em dois estágios (BIRGE e LOUVEAUX, 1997). Em linhas gerais, nesses modelos se faz uma escolha inicial (dita de primeiro estágio), antes de se conhecer o valor dos parâmetros incertos. Após os parâmetros incertos tornarem-se conhecidos, é necessário, então, fazer novas decisões (ditas de segundo estágio) que visam corrigir possíveis efeitos negativos gerados pela decisão de primeiro estágio.

Uma vez que este documento visa dar uma atenção especial para o modelo de otimização utilizado no PEN, sua maior parte, portanto, terá como foco os problemas de otimização com recurso multiestágios. Tais modelos são uma extensão natural dos modelos com dois estágios. Adicionalmente, é importante destacar que parte do texto deste capítulo foi baseado em (SHAPIRO e PHILPOTT, 2009) e, por questão de simplicidade, assume-se que os modelos discutidos neste capítulo são lineares.

2.1 CONCEITOS INICIAIS

Como comentado anteriormente, em otimização estocástica considera-se que as variáveis aleatórias possuem uma FDP conhecida, que pode ser contínua ou discreta, e que será utilizada no problema. Nesse sentido, esta seção discutirá alguns conceitos iniciais que são importantes para compreender como os problemas estocásticos são tratados na vida real, tal como a discretização da FDP no caso contínuo. Para tanto, será apresentado um exemplo simples, porém bastante conhecido na literatura, que é denominado de problema do estoque³. Este exemplo foi adaptado de (SHAPIRO e PHILPOTT, 2009) com alguns ajustes para melhor entendimento.

Suponha que uma empresa tenha que decidir sobre um pedido x de certo produto para atender a uma demanda ξ^0 . O preço de cada pedido é c para cada unidade, tal que $c > 0$. Se a demanda ξ^0 for maior que x , um pedido adicional é necessário e o produto é comprado por um preço $b \geq c$, por unidade. Por outro lado, se $\xi^0 < x$, então incorre-se em um preço $h \geq 0$ para revender ao fornecedor. Portanto, o custo total de um pedido x é dado por:

$$z(x, \xi^0) = cx + b[\xi^0 - x]_+ + h[x - \xi^0]_+, \quad (2.1)$$

em que $[a]_+$ representa o máximo entre o argumento a e zero. Para simplificar, considera-se x como sendo uma variável contínua. O objetivo consiste em minimizar o custo total $z(x, \xi^0)$. Aqui x é uma variável de decisão e a demanda ξ^0 é um dado. Portanto, se a demanda é conhecida, o correspondente problema de otimização pode ser formulado por:

$$\min_{x \geq 0} z(x, \xi^0). \quad (2.2)$$

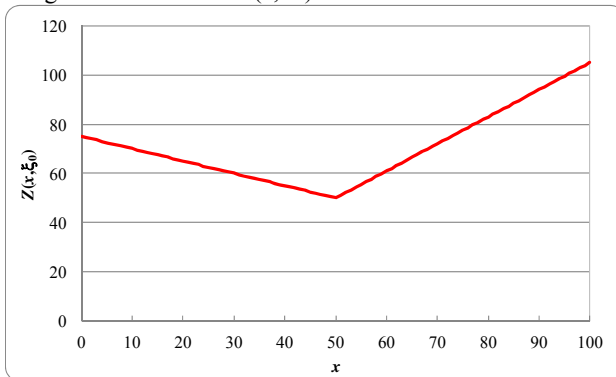
³ Em algumas referências esse problema também é conhecido como o problema do jornaleiro (RUSZCZYNSKI e SHAPIRO, 2003).

Supondo que $c = 1$, $b = 1,5$ e $h = 0,1$, e considerando (2.1) tem-se que:

$$z(x, \xi^0) = \begin{cases} -0,5x + 1,5\xi^0, & \text{se } x < \xi^0 \\ 1,1x - 0,1\xi^0, & \text{se } x \geq \xi^0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Assumindo que $\xi^0 = 50$, obtém-se o gráfico de $z(x, 50)$, mostrado na Figura 1.

Figura 1 - Gráfico de $z(x, 50)$. Ponto de mínimo é $x^* = 50$.



Conforme pode ser visto acima, se a demanda é conhecida, a melhor decisão consiste em, sem surpresa alguma, fazer um pedido x exatamente igual à demanda.

A formulação determinística (2.2) corresponde a um cenário ξ^0 com probabilidade unitária. Fazendo uso dos mesmos dados da representação (2.3) e com a demanda igual a 50 é possível escrever o problema (2.2) como o seguinte modelo de Programação Linear (PL):

$$\begin{aligned} & \min_{x,t} t \\ & \text{s.a: } t + 0,5x \geq 75, \\ & \quad t - 1,1x \geq -5, \\ & \quad x \geq 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Considere agora o caso em que o pedido deve ser feito antes da demanda tornar-se conhecida. Uma maneira de se proceder em tal situação é considerar a demanda ξ como uma variável aleatória com FDP conhecida. Assim, ao usar como métrica valor esperado do custo total, denotado por $E[z(x, \xi)]$, busca-se uma decisão que fornecerá o menor custo, em média, para uma demanda com uma determinada FDP. Dessa forma, pode-se escrever o correspondente modelo de otimização

conforme mostrado a seguir, que é conhecido como Equivalente Determinístico ou Problema Recursivo (BIRGE e LOUVEAUX, 1997).

$$\min_{x \geq 0} E[z(x, \xi)]. \quad (2.5)$$

A próxima questão que surge é como o problema (2.5) deve ser resolvido. No caso em que a FDP é discreta, o valor esperado pode ser substituído pelo somatório das decisões para cada realização possível, ponderadas pela probabilidade associada a cada realização. Assim, considerando um caso em que se tem H valores que definem a FDP discreta, tem-se H realizações possíveis ξ^1, \dots, ξ^H com probabilidades associadas p^1, \dots, p^H tal que $p^1 + \dots + p^H = 1$. Portanto, a função objetivo do problema (2.5) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$E[z(x, \xi)] = \sum_{\omega=1}^H p^\omega z(x, \xi^\omega). \quad (2.6)$$

No entanto, quando a FDP for contínua, que é o caso em estudo deste documento, em alguns casos o problema pode ser resolvido de forma analítica, se a função de distribuição acumulada $F(w) := \text{Prob}(\xi \leq w)$ da variável aleatória ξ estiver disponível. Conforme será apresentado mais adiante, embora seja possível elaborar uma função desta natureza para o exemplo, na maioria dos casos práticos a solução analítica é raramente uma opção viável.

Dessa forma, faz-se necessário definir uma estratégia para viabilizar a solução do problema (2.5). Em geral, a função densidade de probabilidade contínua é discretizada em N realizações ξ^1, \dots, ξ^N com probabilidades associadas p^1, \dots, p^N tal que $p^1 + \dots + p^N = 1$. Com isso, substitui-se o custo esperado pela média dos custos⁴ da decisão em cada realização, conforme apresentado no equacionamento a seguir:

$$E[z(x, \xi)] = \sum_{\omega=1}^N p^\omega z(x, \xi^\omega). \quad (2.7)$$

De forma similar a (2.4), o problema (2.5) pode ser escrito pelo problema de PL abaixo com realizações ξ^1, \dots, ξ^N :

$$\begin{aligned} \min_{x, t^1, \dots, t^N} \quad & \sum_{\omega=1}^N p^\omega t^\omega \\ \text{s.a: } \quad & t^\omega + 0,5x \geq 1,5\xi^\omega, \quad \omega = 1, \dots, N, \\ & t^\omega - 1,1x \geq -0,1\xi^\omega, \quad \omega = 1, \dots, N, \\ & x \geq 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

⁴ Isto porque, pela Lei dos Grandes Números, o custo médio para uma grande quantidade de discretizações tende ao valor esperado $E[z(x, \xi)]$ (RUSZCZYNSKI e SHAPIRO, 2003).

O grande conhecimento que se tem sobre a programação linear faz com que a discretização seja uma estratégia atrativa para tratar problemas tais como (2.5). Neste ponto é importante destacar que a discretização aproxima o problema real que é contínuo em um problema menos preciso, porém mais fácil para encontrar uma solução. A solução analítica será chamada de exata, enquanto que a solução com discretização será denominada de aproximada. Portanto, torna-se importante comparar a solução exata (2.5) com a solução aproximada (2.8). Mantendo $c = 1$, $b = 1,5$ e $h = 0,1$, suponha que ξ possua uma distribuição uniforme no intervalo $[0, 100]$. É possível mostrar (veja (SHAPIRO e PHILPOTT, 2009)) que, para qualquer $x \in [0, 100]$, tem-se:

$$\begin{aligned} E[z(x, \xi)] &= bE[\xi] + (c - b)x + (b + h) \int_0^x F(w)dw, \\ &= 75 - 0,5x + 0,008x^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Suponha agora que a demanda é aproximada por uma distribuição discreta com duas realizações equiprováveis, $\xi^1 = 20$ e $\xi^2 = 80$. Assim:

$$\begin{aligned} \min_{x, t^1, t^2} E[z(x, \xi)] &= \frac{1}{2} \sum_{\omega=1}^2 t^{\omega} \\ \text{s.a: } t^1 + 0,5x &\geq 30, \\ t^1 - 1,1x &\geq -2, \\ t^2 + 0,5x &\geq 120, \\ t^2 - 1,1x &\geq -8, \\ x &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Considere agora que a demanda é aproximada por uma distribuição com três realizações, $\xi^1 = 20$, $\xi^2 = 50$ e $\xi^3 = 80$, com $2/5$, $1/5$ e $2/5$ sendo as respectivas probabilidades, tem-se o seguinte problema:

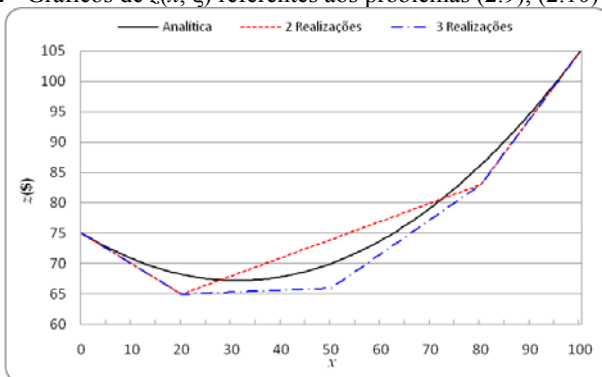
$$\begin{aligned}
\min_{x, t^1, t^2, t^3} E[z(x, \xi)] &= \frac{2}{5}t^1 + \frac{1}{5}t^2 + \frac{2}{5}t^3 \\
\text{s.a: } t^1 + 0,5x &\geq 30, \\
t^1 - 1,1x &\geq -2, \\
t^2 + 0,5x &\geq 75, \\
t^2 - 1,1x &\geq -5, \\
t^3 + 0,5x &\geq 120, \\
t^3 - 1,1x &\geq -8, \\
x &\geq 0.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Nas formulações (2.10) e (2.11) as variáveis t^1 , t^2 e t^3 representam o custo associado a cada realização, as quais são aproximações da demanda. Como cada realização de demanda tem uma probabilidade associada e a decisão ótima refere-se ao menor valor esperado de custo, a função objetivo é composta pelas somas dos custos de cada realização ponderados pela probabilidade associada. Note que a decisão x em (2.10) é a mesma para todas as discretizações, visto que a decisão tomada é única e independente do que acontecerá no futuro. O mesmo ocorre para (2.11).

Dessa forma, a Figura 2 apresenta o valor da função objetivo de diferentes decisões, x , quando a função de densidade de probabilidade da demanda considerada é contínua (2.9), discretizada em duas realizações (2.10) e discretizada em três realizações (2.11). Com isso, de acordo com a Figura 2, nota-se que o aumento no número de realizações fornece uma aproximação mais precisa para a função objetivo, embora, nesse caso, isso não tenha significado uma solução melhor⁵.

⁵ O ponto de mínimo para a solução analítica é encontrado em $x^* = 31,25$. Por sua vez, nos problemas (2.10) e (2.11) o ponto de mínimo é $x^* = 20$.

Figura 2 - Gráficos de $z(x, \xi)$ referentes aos problemas (2.9), (2.10) e (2.11).



O exemplo descrito até aqui evidencia algumas questões importantes. Primeiro, como deve ser aproximada a variável aleatória com base em uma função densidade de probabilidade contínua? Segundo, como deve ser resolvido o problema (aproximado) de otimização? Por fim, como é possível avaliar a qualidade dessa solução aproximada? Na próxima seção será iniciada essa discussão no contexto de problemas estocásticos de dois estágios.

2.2 PROBLEMA DE DOIS ESTÁGIOS

Nesta seção será discutida brevemente a estratégia utilizada em um problema de Programação Estocástica Linear de dois estágios, PEL-2, no tocante ao tratamento de incertezas. A ideia básica de um PEL-2 é que a decisão ótima a ser tomada no primeiro estágio deve ser feita considerando todas as possíveis realizações futuras.

Uma maneira clássica de formular um PEL-2 é a seguinte:

$$\min_{x_1 \in X_1} \{z(x_1) := c_1^\top x_1 + E[q(x_1, \xi_2)]\}, \quad (2.12)$$

em que, $q(x_1, \xi_2)$ é uma função que descreve o custo do segundo estágio para uma dada decisão x_1 e o conjunto de todas as possíveis realizações ξ_2 , sendo que a solução ótima para uma única realização ω de ξ_2 é dada por:

$$\begin{aligned} q(x_1, \xi_2^\omega) &= \min_{x_2^\omega} c_2^\top x_2^\omega \\ \text{s.a. } B_2 x_1 + A_2 x_2^\omega &= b_2^\omega. \end{aligned} \quad (2.13)$$

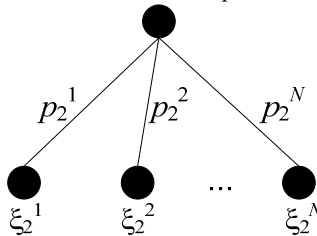
Aqui $x_1 \in \mathcal{R}^n$ é o vetor de decisões do primeiro estágio, X_1 é um conjunto linear convexo (poliedro) em (2.12), $x_2^\omega \in \mathcal{R}^m$ é o vetor de decisões do segundo estágio e b_2^ω é função de ξ_2^ω e contém dados do

segundo estágio. Em (2.13) se considera um caso simplificado em que as incertezas estão apenas nos parâmetros do lado direito das restrições. Entretanto, as discussões feitas aqui são válidas para os outros casos, como quando há incerteza no vetor de custos c_2 .

A formulação considera que os dados do segundo estágio podem ser modelados como um vetor de variáveis aleatórias com função densidade de probabilidade contínua conhecida. Dessa forma, como foi comentado anteriormente, faz-se necessário discretizar a função para resolver o problema numericamente; assim, assume-se que o vetor aleatório ξ_2 tem um número finito de realizações (ξ_2^1, \dots, ξ_2^N) com respectivas probabilidades p_2^1, \dots, p_2^N .

Com isso, ilustra-se uma árvore de cenários para dois estágios, que descreve o relacionamento entre as decisões do primeiro estágio com as consequências para o segundo. A Figura 3 apresenta graficamente a árvore de cenários, na qual os círculos são denominados nós e definem o momento da tomada de decisões, enquanto que as conexões são chamadas arco de probabilidade e conectam as possíveis realizações a partir do nó de origem. Nesse caso, tem-se um nó de origem, que é o primeiro estágio, que também é definido como nó antecessor aos nós de segundo estágio, assim como esses são denominados de nós sucessores ao nó do primeiro estágio. Por fim, destaca-se que, para o caso de dois estágios, um cenário é definido por um par de nós, i.e. uma realização do primeiro e outra do segundo estágio; sendo assim, a árvore de cenários abaixo tem N cenários.

Figura 3 - Árvore de cenários para dois estágios.



Dessa forma, a função valor esperado do problema do segundo estágio é escrita pelo seguinte somatório:

$$E[q(x_1, \xi_2)] = \sum_{\omega=1}^N p_2^{\omega} q(x_1, \xi_2^{\omega}), \quad (2.14)$$

e, adicionalmente, o PEL-2 (2.12)-(2.13) pode ser formulado como um PL de grande porte:

$$\begin{aligned}
\min \quad & c_1^\top x_1 + \sum_{\omega=1}^N p_2^\omega c_2^\top x_2^\omega \\
\text{s.a:} \quad & A_1 x_1 = b_1 \\
& B_2 x_1 + A_2 x_2^\omega = b_2^\omega \quad \omega = 1, \dots, N.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

O problema (2.15) pode ser resolvido diretamente em um único PL ou, quando o problema for muito grande, podem ser utilizadas estratégias de decomposição. Na Seção 2.5 serão apresentados dois métodos de solução por decomposição.

2.3 PROBLEMA MULTIESTÁGIO

Até o momento foram discutidos os conceitos iniciais de otimização estocástica com base em um problema de dois estágios, porém em muitos casos, como o PEN, as decisões são tomadas em mais de dois estágios. Dessa forma, tem-se o problema de Programação Estocástica Linear de T estágios, PEL-T, em que T define o número de estágios nos quais uma decisão deve ser tomada. Formulando o PEL-T da maneira clássica, tem-se:

$$\min_{x_1 \in X_1} \left\{ c_1^\top x_1 + E[q_2(x_1, \xi_2)] \right\}, \tag{2.16}$$

em que, X_1 define uma região convexa definida pelas restrições que compõem o problema (2.16) e para $t = 2, \dots, T-1$:

$$q_t(x_{t-1}, \xi_t^{\omega_t}) = \min_{x_t^{\omega_t} \in X_t^{\omega_t}} \left\{ c_t^\top x_t^{\omega_t} + E[q_{t+1}(x_t^{\omega_t}, \xi_{t+1})] \right\}, \tag{2.17}$$

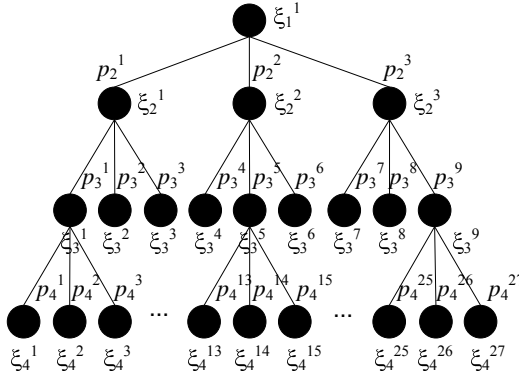
e para $t = T$:

$$q_T(x_{T-1}, \xi_T^{\omega_T}) = \min_{x_T^{\omega_T}} c_T^\top x_T^{\omega_T} \tag{2.18}$$

$$\text{s.a: } B_T x_{T-1} + A_T x_T^{\omega_T} = b_T^{\omega_T}.$$

Da mesma forma que no caso de dois estágios, resolver o valor esperado para uma função densidade de probabilidade contínua é inviável na maioria dos casos. Esse fato é ainda mais acentuado no caso de T estágios, uma vez que se calcula o valor esperado em $T-1$ estágios. Consequentemente, tal como no caso de dois estágios, torna-se necessário discretizar as FDP contínuas para viabilizar a solução do problema. Assim, assumindo que a FDP de cada estágio é discretizada em N valores, $(\xi_t^1, \dots, \xi_t^N)$ com respectivas probabilidades p_t^1, \dots, p_t^N , a árvore de cenários com T estágios teria N^{T-1} nós no último estágio. A Figura 4 ilustra uma árvore de cenários para um caso com quatro estágios com três discretizações.

Figura 4 - Árvore de Cenários para 4 estágios.



Nesse momento é importante reforçar e definir alguns conceitos importantes a respeito da árvore de cenários. Primeiramente, destaca-se que os conceitos de nó e arco comentados no caso de dois estágios continuam valendo para o caso de T estágios. Contudo, a probabilidade associada a cada nó é uma composição da probabilidade de todos os nós antecessores, isto é, a probabilidade de ocorrer o nó 1 do 4º estágio é dada pelo seguinte produto, $p_2^1 p_3^1 p_4^1$. Um cenário é definido por um caminho completo do primeiro estágio até o último. No caso acima, tem-se, portanto, 27 cenários; sendo que, a probabilidade associada a cada cenário é igual à probabilidade do último nó pertencente ao cenário em questão.

Com a discretização, o equacionamento do valor esperado para cada estágio t pode ser escrito pelo seguinte somatório:

$$E[q_{t+1}(x_t, \xi_{t+1})] = \sum_{\omega=1}^N p_t^{\omega_t} q_{t+1}(x_t, \xi_{t+1}^{\omega_t}), \quad (2.19)$$

e, adicionalmente, o PEL-T (2.16)-(2.18) pode ser formulado com um PL de grande porte:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1^\top x_1 + \sum_{t=2}^T \sum_{\omega_t=1}^N p_t^{\omega_t} c_t^\top x_t^{\omega_t} \\ \text{s.a:} \quad & A_1 x_1 = b_1 \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$B_t x_{t-1} + A_t x_t^{\omega_t} = b_t^{\omega_t}, \quad \omega_t = 1, \dots, N; t = 2, \dots, T.$$

Como mencionado previamente, o uso da estratégia de discretização faz com que surjam três questões:

- i. Como construir a árvore de cenários;
- ii. Como resolver o problema de PL (2.20);

- iii. Como medir a qualidade da solução obtida com relação ao “verdadeiro” ótimo.

As respostas para essas questões não são, naturalmente, independentes. Por exemplo, o número de cenários construídos irá afetar a maneira pela qual (2.20) deve ser resolvido. A partir de agora será dedicada atenção para os itens acima, considerando o caso do PEL-T.

2.4 CONSTRUÇÃO DA ÁRVORE DE CENÁRIOS

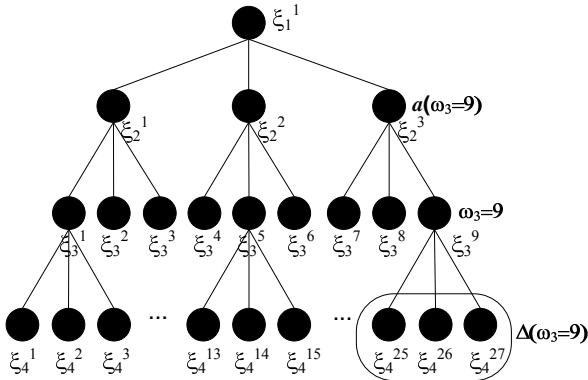
A construção da árvore de cenários é uma etapa muito importante na modelagem de um problema estocástico, uma vez que ela é responsável por representar o processo estocástico. Na prática, a árvore de cenários pode ser construída com base na enumeração explícita de “opiniões de especialistas” sobre o futuro, sendo sempre desejável que o número total de cenários construídos seja de magnitude modesta, de tal maneira que o problema de PL associado possa ser resolvido com um esforço computacional moderado. Também é consenso que, em geral, uma solução fornecida com base em estudos de poucos cenários fornece estratégias mais robustas que aquela adquirida mediante análise de um único cenário, isto é, o caso determinístico. Neste ponto é interessante notar que, tipicamente, somente a solução ótima de primeiro estágio tem um valor prático, dado que a “verdadeira” realização dos demais estágios será diferente do conjunto de cenários construídos.

Antes de definir como será construída a árvore de cenários, faz-se necessário definir alguns conceitos importantes relacionados à árvore. Considere que o espaço amostral para um estágio t é definido como Ω_t , enquanto que um cenário nesse espaço pode ser definido como ω_t e uma realização desse cenário é denominada de nó e descrita por $\xi_t^{\omega_t}$. Neste ponto é importante destacar que será sempre utilizado ω_t para se referir a um cenário completo do estágio 1 (um) até t , mas, também, como identificador do nó no estágio t que nesse caso é o último nó do cenário ω_t e pertence apenas àquele cenário.

O primeiro estágio é considerado determinístico, isto é, assume-se que a realização é previamente conhecida; este nó também é denominado de nó raiz. Cada nó do estágio $t \geq 2$, $\xi_t^{\omega_t}$, possui apenas um nó antecessor, denominado $a(\omega_t)$. Além disso, cada nó do estágio $t < T$ tem um conjunto de nós sucessores definido como $\Delta(\omega_t)$, sendo que a quantidade de nós descendentes também pode ser definida como o número de aberturas $n(\omega_t)$. Dessa forma, os nós formam uma árvore de cenários conforme ilustrado pela Figura 5, que apresenta uma árvore de

quatro estágios com um conjunto de três nós sucessores (ou três aberturas) para cada estágio de tempo.

Figura 5 - Árvore de cenários.



Uma árvore de cenários pode ser modelada de diferentes maneiras, podendo ser construída com o mesmo número de aberturas em cada realização de um mesmo estágio, isto é, $n(\omega_t)$ é o mesmo para todos os nós do estágio t , conforme pode ser observado na Figura 6b. Por outro lado, o número de nós descendentes pode ser diferente, como é o caso ilustrado pela Figura 6a. Uma modelagem muito comum, e que é utilizada no PEN, considera o mesmo número de descendentes para todos os estágios, ou seja, $n(\omega_t)$ é o mesmo para qualquer ω_t , exceto para $t = T$, em que $n(\omega_T) = 0$; esse caso é apresentado na Figura 7. De acordo com (CHIRALAKSANAKUL e MORTON, 2004) esta última modelagem é denominada de árvore de cenários uniforme.

Figura 6 - Diferentes modelagens para a árvore de cenários.

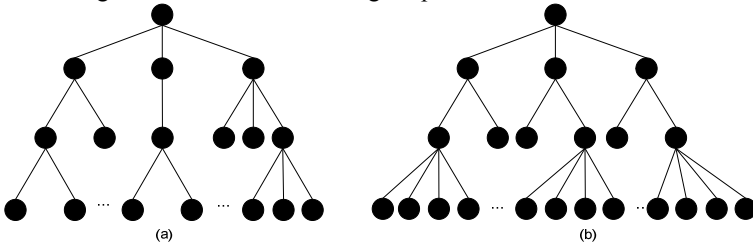
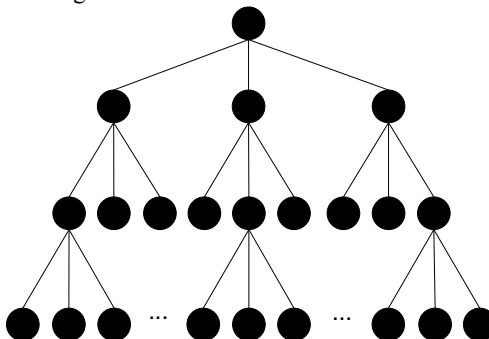


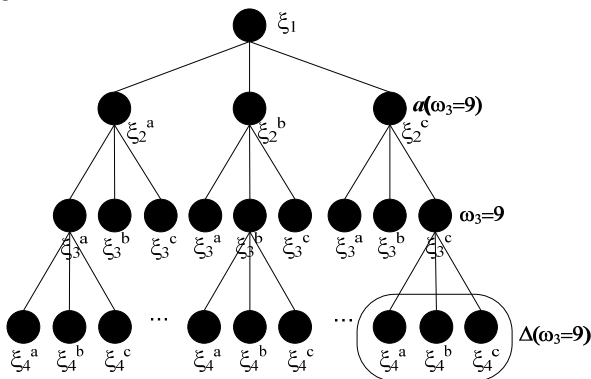
Figura 7 - Árvore de cenários uniforme



Além do número de nós descendentes de cada realização em cada estágio, outro aspecto relevante são as realizações que compõem a árvore. O conjunto de realizações pode ser o mesmo para cada estágio ou diferente mesmo dentro do estágio, que segundo (CHIRALAKSANAKUL e MORTON, 2004) podem ser definidas como amostras comuns ou amostras independentes, respectivamente. Naturalmente que no caso da Figura 6a o conjunto de realizações terá que ser de amostras independentes, visto que o número de realizações em um mesmo estágio pode ser diferente dependendo do nó antecessor. Por exemplo, pela Figura 6a se nota que no terceiro estágio são necessários três conjuntos com duas, uma e três realizações. Nas outras duas modelagens, Figura 6b e Figura 7, esta característica é uma opção de modelagem, sendo de fundamental importância na escolha da estratégia de solução.

A árvore de cenários que tem o mesmo número de nós descendentes para todos os estágios (Figura 7) e amostras comuns, será denominada de árvore de cenários uniforme com amostras comuns. Assim, considerando o caso da Figura 5, tem-se que $\xi_3^1 = \xi_3^4 = \xi_3^7 = \xi_3^a$ e $\xi_3^2 = \xi_3^5 = \xi_3^8 = \xi_3^b$ e $\xi_3^3 = \xi_3^6 = \xi_3^9 = \xi_3^c$. Portanto, pode-se reescrever a árvore de cenários conforme mostrado na Figura 8.

Figura 8 - Árvore de cenários uniforme com amostras comuns.



Assim, o cenário nove do terceiro estágio, ilustrado na Figura 8, é constituído pela realização ξ_3^c quando os nós antecessores forem $\{\xi_1, \xi_2^c\}$. Pode-se, então, definir $\omega_3 = 9$ como $\{\xi_1, \xi_2^c, \xi_3^c\}$; enquanto que o cenário $\omega_3 = 8$ é definido como $\{\xi_1, \xi_2^c, \xi_3^b\}$. O nó antecessor a $\omega_3 = 9$, $a(\omega_3 = 9)$, é dado pelo último nó do cenário $\omega_2 = 3$, ξ_2^c , e o conjunto de nós sucessores, $\Delta(\omega_3 = 9)$, formam os cenários $\omega_4 = 25, 26$ e 27 .

Com base nos aspectos supracitados, uma questão natural é: qual é o modelo mais adequado da árvore, de modo que a solução associada seja muito próxima do verdadeiro valor ótimo do problema original? Primeiro, deve ficar claro que esta questão pré-supõe a existência de uma boa metodologia para construir a árvore – um procedimento de baixa qualidade nunca poderá fornecer uma boa solução, não importando quantos cenários sejam usados. Se o objetivo é construir cenários com base em metodologias especializadas, então se faz necessário algum procedimento computacional para transformar a informação dos especialistas em realizações que irão compor a árvore de cenários. Por exemplo, suponha que os componentes do vetor $\xi \in \mathcal{H}^d$ são independentes entre si e desejamos construir realizações considerando três possíveis valores para cada um (e.g., baixo, médio e elevado). Nesse caso o número total de realizações, e cenários, para um caso de dois estágios, é $N = 3^d$. Esse crescimento exponencial faz com que a construção já se torne onerosa, mesmo para dois estágios e um número de magnitude modesta (e.g., $d = 25$).

Considere o caso em que $N = 3^{25} \approx 10^{12}$, o correspondente problema de PL torna-se demasiadamente grande para ser tratado computacionalmente. Neste ponto, defronta-se com dois objetivos contraditórios. Se por um lado o número de cenários deve ser adequado

para limitar o esforço computacional, por outro essa árvore de cenários tem que fornecer uma solução com boa qualidade para o problema. De acordo com (HEITSCH e RÖMISCH, 2009) existem diferentes estratégias para construí-la, sendo que são enumeradas cinco:

- a) Construção com base em barreiras;
- b) Esquemas baseados em MC ou QMC;
- c) Baseado na amostragem do valor esperado da informação perfeita e redução com técnicas de decomposição;
- d) Princípios de manter os momentos estatísticos;
- e) Aproximações com base em métricas probabilísticas.

Uma boa estratégia que pode conciliar os dois objetivos, comentados no parágrafo anterior, é fazer uso de algum processo aleatório, ou seja, os cenários podem ser produzidos com base em técnicas de amostragem como MC, LHS e QMC. Dessa forma, no caso deste trabalho, será focado apenas esta classe definida por (HEITSCH e RÖMISCH, 2009). Na sequência serão apresentados mais detalhes sobre o Monte Carlo, sendo que mais à frente, neste documento, serão discutidas detalhadamente alternativas ao MC, como o QMC e o LHS.

Para dar uma ideia geral de como uma simulação de MC pode ser usada, considere um PEL-2 e suponha que o vetor de variável aleatória ξ_2 possui uma FDP contínua. Além disso, suponha, também, que seja possível gerar uma amostra de tamanho N , ξ_2^1, \dots, ξ_2^N , do vetor de variáveis aleatórias ξ_2 . No caso do sorteio MC as amostras são iid – independente e identicamente distribuídas – isto é, cada realização tem a mesma probabilidade ($1/N$) e cada ξ_2^ω é independentemente dos demais. Assim, dada uma amostra, é possível aproximar a função valor esperado $q(x_1) = E[z(x_1, \xi_2)]$ pela média:

$$E[q_1(x_1, \xi_2)] = q(x_1) \cong q_N(x_1) = \frac{1}{N} \sum_{\omega=1}^N q(x_1, \xi_2^\omega), \quad (2.21)$$

e, consequentemente, usar a seguinte aproximação para o problema (2.12):

$$\min_{x_1 \in X_1} \left\{ c_1^\top x_1 + \frac{1}{N} \sum_{\omega=1}^N q(x_1, \xi_2^\omega) \right\}. \quad (2.22)$$

Esta estratégia foi sugerida por diferentes autores com diferentes denominações. Em trabalhos mais recentes, a ideia é conhecida como método de aproximação pela média amostral (em inglês, *Sample Average Approximation* – SAA) (KLEYWEGT *et al.*, 2002). Note que para uma amostra gerada ξ_2^1, \dots, ξ_2^N o método de SAA (2.22) possui a

mesma estrutura que o PEL-2 (2.12)-(2.13) com cenários ξ_2^ω , $\omega = 1, \dots, N$, cada um com a mesma probabilidade $p_2^\omega = 1/N$.

Retornando a questão anterior: quão grande deve ser o tamanho da amostra N a ser escolhido no sentido que o método de SAA forneça uma solução de boa qualidade para o PEL-2? Métodos de MC são caracterizados pela sua convergência lenta. Para um valor fixo de $x_1 \in X_1$ e uma amostra de SAA, a variância da média da amostra $q_N(x_1)$ é igual a $\text{Var}[q(x_1, \xi_2)]/N$, em que $\text{Var}[y]$ define a variância de y . Em termos estocásticos isso implica que a média da amostra converge para o correspondente valor esperado a uma taxa na ordem de $N^{-1/2}$.

Um aspecto importante para o uso das técnicas de Monte Carlo reside no fato que a precisão de um método de SAA não depende do número de cenários, mas sim da variância de $q(x_1, \xi_2)$. Isso justifica o sucesso obtido por métodos SAA na solução de algumas classes de problema de PEL-2. Pode-se mostrar sob ponto de vista teórico (SHAPIRO, 2007), bem como verificar em resultados numéricos, que com um tamanho de amostra moderado o método de SAA (e suas variantes) resolvem o “verdadeiro (original) problema” com uma precisão razoável (i.e., 1 ou 2%) desde que as seguintes condições sejam verificadas:

- i. Seja possível gerar uma amostra de realizações do vetor aleatório ξ ;
- ii. Para valores moderados de tamanho da amostra seja possível resolver eficientemente o problema de SAA associado;
- iii. O problema original seja do tipo recurso relativamente completo⁶;
- iv. A variância da função (valor ótimo) do problema não seja “muito grande”.

2.5 ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO

Depois de definida a árvore de cenários a ser otimizada, a próxima etapa consiste em desenvolver um algoritmo de solução, de acordo com as restrições do problema. Nessa etapa, ignora-se o problema original e considera-se que a árvore de cenários descreve o problema da maneira mais adequada possível. Portanto, dentro desta seção considera-se como solução exata a solução ótima para a árvore de

⁶ Um problema é dito ser de recurso relativamente completo se, para qualquer $x_t \in X_t$ e realização $\xi_{t+1}^{\omega t+1}$, o problema do estágio $t+1$ é sempre viável.

cenários que se está analisando, não a solução ótima do problema original, como utilizado anteriormente.

Segundo (MORTON, 1998), os algoritmos de otimização estocástica podem ser divididos em três categorias:

- i. **Soluções exatas:** Neste caso o algoritmo resolve o problema considerando todo o espaço amostral das variáveis aleatórias; aqui estão incluídos, por exemplo, algoritmos com base no método Simplex, decomposição, Pontos Interiores, Progressive Hedging e Decomposição Aninhada⁷ (BIRGE e LOUVEAUX, 1997);
- ii. **Aproximações:** Um esquema clássico deste tipo de algoritmo consiste em calcular os limites determinístico inferior e superior por meio das inequações de Jensen e Edmundson-Madansky (KALL *et al.*, 1988), respectivamente;
- iii. **Métodos de amostragem:** Algoritmos com base em amostragem são os métodos do quasigradiente estocástico e variações do L-Shaped (SLYKE e WETS, 1969) como a PDDE em (PEREIRA e PINTO, 1991), a decomposição aninhada *abridged* (DONOHUE e BIRGE, 2006), o método de planos cortantes com amostragem parcial denominado CUPPS (CHEN e POWELL, 1999), entre outros. Estes algoritmos usam um espaço amostral reduzido por meio de uma amostragem para modelar o espaço amostral total.

É importante ressaltar que, para modelos com um grande número de estágios, as duas primeiras categorias apresentadas acima podem tornar-se inviáveis devido ao esforço computacional; dessa forma, algoritmos com base em amostragem são as alternativas mais interessantes. Como no PEN o horizonte de estudo é de cinco a 10 anos, com discretização de estágio mensal, tem-se até 120 estágios de estudos. Assim, mesmo considerando apenas duas realizações (aberturas) por estágios, tem-se mais de $6,6 \cdot 10^{35}$ cenários. Dessa forma, optou-se por utilizar a abordagem dos algoritmos com base em amostragem.

Esta seção terá como foco principal um algoritmo com essa característica, que é denominado de Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE). No entanto, antes de apresentar e discutir a PDDE, será apresentada a Decomposição Aninhada (DA). Apesar da DA ser um

⁷ Nesse caso, considera-se que o problema estocástico a ser resolvido é modelado pela árvore de cenários, ignorando-se o problema real. Portanto, por exemplo, com a Decomposição Aninhada é possível encontrar a solução exata para o problema associado à árvore de cenários.

algoritmo de solução exata, a estratégia de solução da PDDE e DA são muito parecidas e, assim, a última facilitará a compreensão da primeira, já que ambas foram desenvolvidas com base na Decomposição de Benders (BENDERS, 1962).

2.5.1 Decomposição Aninhada

Como a DA (BIRGE e LOUVEAUX, 1997) será apresentada para facilitar a compreensão da PDDE, optou-se por primeiramente descrevê-la para um problema de dois estágios e, na sequência, discuti-la para o caso PEL-T. Nesse sentido, considere o PEL-2 formulado em (2.15), em que o espaço amostral é um conjunto finito e definido por Ω_2 , que um cenário desse espaço é identificado como ω e uma realização desse cenário é dada por ξ_2^ω . A Figura 3, mostrada anteriormente, ilustra os cenários do problema definido acima, no qual se tem que o espaço amostral definido por Ω_2 é dado pelo conjunto $\omega = 1, 2, 3, \dots, N$, em que N é a quantidade de realizações do segundo estágio. Além disso, cada cenário, $\omega \in \Omega_2$, pode ser expresso pelo conjunto $\{\xi_1, \xi_2^\omega\}$.

Para resolver o PEL-2 com base na DA ignora-se inicialmente a existência dos problemas do segundo estágio em (2.15). Assim, resolve-se o problema de primeiro estágio da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{Min } & c_1^\top x_1 \\ \text{s.a: } & A_1 x_1 = b_1, \\ & x_1 \geq 0. \end{aligned} \tag{2.23}$$

A solução ótima, x_1^* , encontrada em (2.23) é utilizada como valor inicial do recurso no segundo estágio. Tem-se, então, que o segundo estágio pode ser descrito pelo problema (2.24), para $\omega = 1, \dots, N$.

$$\begin{aligned} z_2^\omega = \text{Min } & c_2^\top x_2^\omega \\ \text{s.a: } & A_2 x_2^\omega = b_2^\omega - B_2 x_1^*, \\ & x_2^\omega \geq 0. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Ao resolver os problemas de segundo estágio (2.24) para $\omega = 1, \dots, N$, encontra-se a solução ótima para cada cenário do segundo estágio. No entanto, conforme definido em (2.15), o objetivo do problema é minimizar a soma do custo do primeiro estágio com o custo esperado do segundo estágio. Assim, na prática observa-se que a solução encontrada por (2.23) e (2.24) pode não ser ótima para o problema completo. Isto porque a decisão x_1^* foi tomada ignorando as

consequências dessa decisão no segundo estágio. Além disso, para cada realização ξ_2 em cada cenário ω existe uma solução x_1 que minimiza o custo do problema do segundo estágio desse cenário.

Dessa forma, torna-se necessário adicionar informações ao problema de primeiro estágio sobre como o segundo estágio é afetado pelas decisões do primeiro. Nessa direção, a DA adiciona ao primeiro estágio uma aproximação linear por partes que estima o custo esperado do segundo estágio de acordo com a decisão tomada no primeiro estágio. Para compreender esta estratégia, considere o problema dual de (2.24), apresentado abaixo:

$$\begin{aligned} z_2^\omega &= \text{Max } \pi_2^{\omega^T} (b_2^\omega - B_2 x_1^*) \\ \text{s.a: } \pi_2^{\omega^T} A_2 &\leq c_2. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Como pode ser observado em (2.25), as restrições não dependem das decisões tomadas no primeiro estágio e do cenário em estudo. Da teoria de PL, sabe-se que esta é uma região viável na qual a solução de (2.25) pode ser caracterizada por uma coleção de pontos extremos (vértices). Assim, ao enumerar todas as soluções possíveis, tem-se que (2.25) pode ser reescrito em função da solução do primeiro estágio da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} z_2^\omega &= \text{Max } \pi_2^{\omega^T} (b_2^\omega - B_2 x_1) \\ \text{s.a: } \pi_2^\omega &\in \{ \pi_{21}, \pi_{22}, \dots, \pi_{2,NPE} \}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

em que,

NPE Quantidade de pontos extremos do problema dual.

Destaca-se que (2.26) descreve o problema do segundo estágio para qualquer nó ω e solução do primeiro estágio, pois o conjunto de soluções duais é o mesmo para qualquer nó e solução do primeiro estágio. Nesse caso, é sempre possível encontrar uma solução viável para o segundo estágio, independentemente da decisão tomada no primeiro, pois se assume que este é um problema de recurso relativamente completo. Dessa forma pode-se, então, formular o problema dual de (2.26), isto é, reescrever o problema primal (2.24):

$$\begin{aligned}
z_2^\omega &= \text{Min } \alpha_2^\omega \\
\text{s.a: } \alpha_2^\omega &\geq \pi_{21}^\top (b_2^\omega - B_2 x_1), \\
\alpha_2^\omega &\geq \pi_{22}^\top (b_2^\omega - B_2 x_1), \\
&\vdots \\
\alpha_2^\omega &\geq \pi_{2,NPE}^\top (b_2^\omega - B_2 x_1).
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Tem-se, portanto, que o problema definido inicialmente por (2.15) pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\text{Min } & c_1^\top x_1 + \sum_{\omega \in \Omega} p_2^\omega \alpha_2^\omega \\
\text{s.a: } & A_1 x_1 = b_1, \\
& \alpha_2^\omega + \pi_{21}^\top B_2 x_1 \geq \pi_{21}^\top b_2^\omega, \quad \forall \omega \in \Omega \\
& \alpha_2^\omega + \pi_{22}^\top B_2 x_1 \geq \pi_{22}^\top b_2^\omega, \quad \forall \omega \in \Omega \\
& \vdots \\
& \alpha_2^\omega + \pi_{2,NPE}^\top B_2 x_1 \geq \pi_{2,NPE}^\top b_2^\omega, \quad \forall \omega \in \Omega \\
& x_1 \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Em (2.28) tem-se um conjunto de cortes para cada realização do segundo estágio, contudo uma estratégia comumente utilizada para reduzir o tamanho do PL consiste em agregar os cortes de cada realização em um conjunto de cortes que representam os cortes em (2.28). Isto é feito ao definir uma variável escalar α_2 que substitui o custo esperado do segundo estágio, isto é:

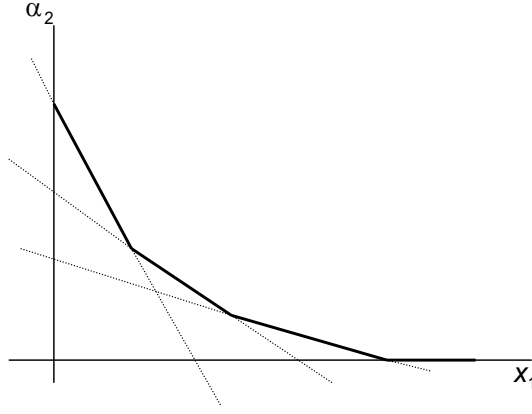
$$\alpha_2 = \sum_{\omega \in \Omega} p_2^\omega \alpha_2^\omega. \tag{2.29}$$

Por sua vez, podemos reescrever (2.28) como:

$$\begin{aligned}
\text{Min } & c_1^\top x_1 + \alpha_2 \\
\text{s.a: } & A_1 x_1 = b_1, \\
& \alpha_2 + \sum_{\omega \in \Omega} p_2^\omega \pi_{21}^\top B_2 x_1 \geq \sum_{\omega \in \Omega} p_2^\omega \pi_{21}^\top b_2^\omega, \\
& \alpha_2 + \sum_{\omega \in \Omega} p_2^\omega \pi_{22}^\top B_2 x_1 \geq \sum_{\omega \in \Omega} p_2^\omega \pi_{22}^\top b_2^\omega, \\
& \vdots \\
& \alpha_2 + \sum_{\omega \in \Omega} p_2^\omega \pi_{2,NPE}^\top B_2 x_1 \geq \sum_{\omega \in \Omega} p_2^\omega \pi_{2,NPE}^\top b_2^\omega, \\
& x_1 \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Em (2.30) verifica-se que a solução do problema não depende mais diretamente do segundo estágio, uma vez que se conhecem todas as consequências futuras das decisões tomadas no primeiro estágio. As desigualdades de (2.30) formam a Função Recurso (FR) e cada aproximação linear integrante dessa função é conhecida como Corte de Benders (BENDERS, 1962). A Figura 9 ilustra um exemplo da FR formada pelos cortes.

Figura 9 - Função de Custo Futuro formada pelos Cortes de Benders.



A enumeração de todos os pontos extremos (vértices) do problema dual (2.26) é inviável na maioria dos problemas práticos. Dessa forma, torna-se necessário construir iterativamente os cortes de Benders que irão compor o primeiro estágio por uma outra estratégia. Para tanto, resolve-se o primeiro estágio definido em (2.23) e com a solução ótima, x_1^* , constrói-se o segundo estágio para cada cenário ω formulado em (2.24); tem-se, então, que a solução dual ótima do problema (2.25) é dada por $\pi_2^{\omega*}$ e $z_2^{\omega*}$, para $\omega \in \Omega_2$. Com as soluções do primeiro e segundo estágios é possível calcular um corte de Benders, que conforme (2.30) é definido como:

$$\alpha_2 + \sum_{\omega \in \Omega} p_2^{\omega} \pi_{21}^{\omega*T} B_2 x_1 \geq \sum_{\omega \in \Omega} p_2^{\omega} \pi_{21}^{\omega*T} b_2^{\omega}. \quad (2.31)$$

O custo do segundo estágio para um cenário ω é dado por:

$$z_2^{\omega*} = \pi_2^{\omega*T} (b_2^{\omega} - B_2 x_1^*). \quad (2.32)$$

Ao isolar $\pi_2^{\omega*T} b_2^{\omega}$ em (2.32) e substituir em (2.31), tem-se que um corte pode ser calculado da seguinte maneira:

$$\alpha_2 + \sum_{\omega \in \Omega} p_2^\omega \pi_2^{\omega* \top} B_2 x_1 \geq \sum_{\omega \in \Omega} p_2^\omega z_2^{\omega*} + \sum_{\omega \in \Omega} p_2^\omega \pi_2^{\omega* \top} B_2 x_1^*. \quad (2.33)$$

Pode-se, então, adicionar o Corte de Benders definido em (2.33) ao primeiro estágio, (2.23), obtendo o seguinte problema:

$$\text{Min } c_1^\top x_1 + \alpha_2$$

$$\text{s.a: } A_1 x_1 = b_1,$$

$$\alpha_2 + \sum_{\omega \in \Omega} p_2^\omega \pi_2^{\omega* \top} B_2 x_1 \geq \sum_{\omega \in \Omega} p_2^\omega z_2^{\omega*} + \sum_{\omega \in \Omega} p_2^\omega \pi_2^{\omega* \top} B_2 x_1^*, \quad (2.34)$$

$$\alpha_2 \geq 0, x_1 \geq 0.$$

Após determinada a primeira aproximação da FR, calcula-se uma nova solução ótima para o problema de primeiro estágio. Esta nova solução atualiza os problemas (2.24), para o qual se obtêm novas soluções duais e que, por sua vez, geram novos cortes (2.33) a serem adicionados à (2.34). Este processo iterativo continua adicionando cortes até que o critério de parada seja atendido.

O critério é testado antes de calcular o próximo corte de Benders a ser adicionado ao problema do primeiro estágio, sendo que o critério de parada avalia se o custo total do primeiro estágio obtido com as aproximações da FR está próximo à soma do custo esperado do primeiro e segundo estágio, dentro de uma tolerância ε . Isto porque se a FR construída até a iteração em análise for de boa qualidade, ela representará o custo esperado do segundo estágio de forma bastante próxima do valor real, garantindo que a solução encontrada é ótima.

Como a cada iteração o conjunto de cortes de Benders calculado é uma aproximação inferior do custo esperado do segundo estágio, tem-se que o custo dado pela decisão no primeiro estágio mais a FR fornecerá um valor que é inferior ao valor ótimo. Assim, é possível definir um limite inferior denominado Z_{INF} , que é formado pelo custo do primeiro estágio, mais o valor da FR para x_1^* . Por construção a FR é uma aproximação inferior, uma vez que é obtida pela tangente (derivada) da função de custo esperado real ou de uma aproximação inferior da mesma. Em outras palavras, assumindo que o problema é convexo em x_1 , a aproximação construída para um determinado x_1 fornecerá sempre um valor menor ou igual à função de custo esperado real.

Por outro lado, ao tomar decisões com base em uma aproximação da FR tem-se que o primeiro estágio não tomará a decisão ótima, portanto, o custo esperado de operação considerando todas as decisões será superior ao valor ótimo. Dessa forma, define-se um limite superior

para o custo, denominado Z_{SUP} , formado pela soma dos custos no primeiro e segundo estágio. Matematicamente, os dois limites podem ser expressos por:

$$Z_{INF} = c_1^T x_1^* + \alpha_2^*, \quad (2.35)$$

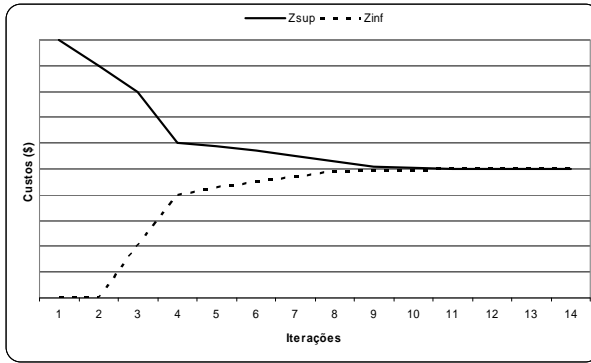
$$Z_{SUP} = c_1^T x_1^* + \sum_{\omega \in \Omega} p_2^\omega c_2^T x_2^{\omega*}. \quad (2.36)$$

O Z_{INF} e Z_{SUP} são calculados considerando o problema de primeiro estágio (2.34) e os custos do segundo estágio obtidos com (2.24) considerando a solução encontrada para o problema do primeiro estágio da iteração em análise. O critério de parada é definido da seguinte maneira:

$$Z_{SUP} - Z_{INF} \leq \varepsilon. \quad (2.37)$$

A Figura 10 ilustra uma evolução do Z_{INF} e Z_{SUP} ao longo do processo iterativo comumente encontrada pela metodologia de solução descrita.

Figura 10 - Evolução do Z_{INF} e Z_{SUP} .



2.5.1.1 Decomposição Aninhada para T estágios

Após definida a estratégia de solução utilizando a DA para um PEL-2, discute-se a metodologia de solução da DA aplicada ao caso mais geral de T estágios (PEL-T), definido em (2.20). Para resolver (2.20) separam-se cada nó da árvore em um PL e utilizam-se cortes de Benders para determinar as consequências futuras da decisão tomada em cada nó. A formulação do problema para um nó do cenário ω_t no estágio t , que será o último nó do cenário ω_r , é apresentada a seguir, sendo que $\alpha_{T+1} \equiv 0$.

$$\begin{aligned}
& \text{Min } c_t^\top x_t^{\omega_t} + \alpha_{t+1} \\
& \text{s.a: } A_t x_t^{\omega_t} = b_t^{\omega_t} - B_t x_{t-1}^{a(\omega_t)}, \\
& \alpha_{t+1} + \sum_{\omega_{t+1} \in \Delta(\omega_t)} p_{t+1}^{\omega_{t+1}} \pi_{t+1}^{\omega_{t+1}* \top} B_{t+1} x_t^{\omega_t} \geq \sum_{\omega_{t+1} \in \Delta(\omega_t)} p_{t+1}^{\omega_{t+1}} z_{t+1}^{\omega_{t+1}*} \\
& \quad + \sum_{\omega_{t+1} \in \Delta(\omega_t)} p_{t+1}^{\omega_{t+1}} \pi_{t+1}^{\omega_{t+1}* \top} B_{t+1} x_t^{\omega_t*}, \\
& x_t^{\omega_t} \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

A estratégia de solução discutida nesta seção é a extensão da DA para o caso multiestágio (PEL-T). Neste caso, resolvem-se os problemas de cada nó da árvore armazenando as soluções, de $t = 1$ até $t = T$ e atualizando-se os nós sucessores de acordo com a solução ótima encontrada. Esta etapa é conhecida como recursão progressiva (*forward*), pois começa no primeiro estágio e prossegue cronologicamente até o último. Ao final desta etapa avalia-se o critério de parada como na seção anterior, sendo que Z_{INF} e Z_{SUP} são dados por:

$$Z_{INF} = c_1^\top x_1^* + \alpha_2^*, \tag{2.39}$$

$$Z_{SUP} = c_1^\top x_1^* + \sum_{t=2}^T \sum_{\omega_t \in \Omega_t} p_t^{\omega_t} c_t^\top x_t^{\omega_t*}. \tag{2.40}$$

Se o critério de parada definido em (2.37) não for atendido, deve-se, então, adicionar novos cortes de Benders. Para tanto, inicia-se a segunda etapa do algoritmo denominada de recursão regressiva (*backward*), pois começa no estágio $t = T$ e vai até $t = 2$. Nesta etapa calculam-se os seguintes cortes de Benders (2.41) a serem adicionados ao nó antecessor, $a(\omega_t)$, utilizando a metodologia apresentada na seção anterior.

$$\begin{aligned}
\alpha_{t+1} + \sum_{\omega_{t+1} \in \Delta(\omega_t)} p_{t+1}^{\omega_{t+1}} \pi_{t+1}^{\omega_{t+1}* \top} B_{t+1} x_t^{\omega_t} \geq \sum_{\omega_{t+1} \in \Delta(\omega_t)} p_{t+1}^{\omega_{t+1}} z_{t+1}^{\omega_{t+1}*} \\
+ \sum_{\omega_{t+1} \in \Delta(\omega_t)} p_{t+1}^{\omega_{t+1}} \pi_{t+1}^{\omega_{t+1}* \top} B_{t+1} x_t^{\omega_t*}
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Para realizar a recursão regressiva considera-se a mesma condição inicial utilizada na recursão progressiva, ou seja, o problema (2.38) é construído com a solução do nó antecessor, obtida na recursão progressiva da mesma iteração. Além disso, destaca-se que para os estágios $t < T$ o corte gerado pelo conjunto de cenários sucessores, $\Delta(\omega_t)$, na iteração atual também é considerado. Depois de terminada a recursão regressiva inicia-se uma nova recursão progressiva e testa-se o critério de parada. Se o critério não foi atendido, adicionam-se novos

cortes por meio da recursão regressiva. Resumindo, pode-se definir o algoritmo da DA como:

Algoritmo 1: Decomposição Aninhada

1. Faça $it = 0$;
 Adicione um limite inferior para os cortes, $\alpha_{t+1} \geq 0$ para
 $t = 1, \dots, T-1$;

Recursão Progressiva: 2 a 3

2. Resolva o problema de primeiro estágio, (2.38) com $t = 1$, e
 obtenha (x_1^*, α_2^*) e
 Calcule Z_{INF} (2.39)
3. Faça de $t = 2$ a T
 Faça para $\omega_t \in \Omega_t$
 Resolva o problema (2.38) do estágio t e realização $\xi_t^{\omega_t}$
 e obtenha $x_t^{\omega_t*}$;
 Fim
 Fim
 Calcule Z_{SUP} (2.40).
4. Testa convergência (2.37). Em caso positivo, pare.

Recursão Regressiva: 5

5. Faça de $t = T-1$ a 1
 Faça para $\omega_t \in \Omega_t$
 Faça para $\omega_{t+1} \in \Delta(\omega_t)$
 Resolva o problema (2.38) do estágio $t+1$ e
 realização $\xi_{t+1}^{\omega_{t+1}}$ e obtenha os $\pi_{t+1}^{\omega_{t+1}*}$ e $z_{t+1}^{\omega_{t+1}*}$;
 Fim
 Com os resultados calcule o Corte (2.41) e adicione ao
 último nó de ω_t .
 Fim
 Fim.
6. Faça $it = it + 1$ e vá ao passo 2.

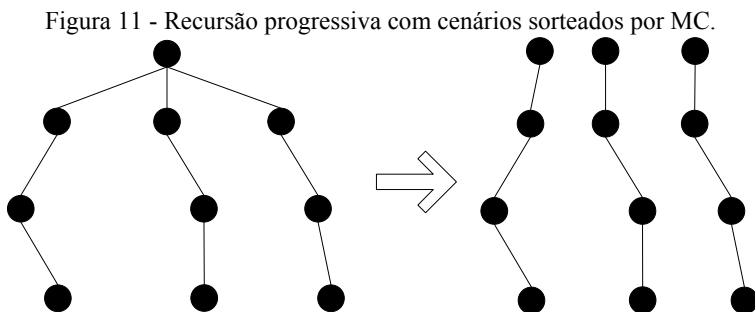
Como comentado anteriormente, esta metodologia pode ser muito onerosa computacionalmente para casos com grande número de estágios, pois a quantidade de cenários cresce exponencialmente com o número de estágios. Dessa forma, faz-se necessário utilizar estratégias

para viabilizar a solução, como a PDDE proposta por (PEREIRA e PINTO, 1991).

2.5.2 Programação Dinâmica Dual Estocástica

A PDDE é uma estratégia de solução para problemas de PEL-T e que tem a DA como base. Na PDDE sorteiam-se cenários dentre todos os possíveis cenários da árvore, buscando-se reduzir significativamente o número de cenários no estudo. No caso proposto por (PEREIRA e PINTO, 1991), os cenários foram sorteados utilizando técnicas de MC, assim, os cenários são iid. A política de operação ao final do algoritmo da PDDE é formada pela Função de Custo Futuro (FCF) de cada estágio. A FCF é uma aproximação linear por partes dos custos futuros e fora denominada de FR na DA.

Considere a árvore de cenários apresentada na Figura 6b anteriormente, e que após um sorteio de MC são mantidos apenas os cenários amostrados. Portanto, pode-se redesenhar a árvore de cenários conforme a Figura 11, abaixo.



Pela Figura 11 observa-se que os cenários podem ser modelados independentemente. Isto pode ser feito ao repetir os nós que pertencem a mais de um cenário, como no caso do primeiro estágio em que cada um dos cenários tem a mesma realização. A modelagem com cenários independentes é bastante interessante, pois facilita a implementação do algoritmo e o uso de processamento paralelo se torna natural.

Antes de apresentar o algoritmo de solução da PDDE, faz-se necessário discutir uma característica importante e essencial para a aplicação da PDDE. Na PDDE é importante compartilhar os Cortes de Benders, isto é, um corte gerado para um determinado nó deve ser adicionado a todos os nós do mesmo estágio. O compartilhamento de cortes na PDDE é importante, pois caso contrário como só uma pequena

porção dos cenários é visitada dentro do algoritmo, ter-se-ia um número reduzido de cortes, o que inviabilizaria a convergência do algoritmo. Além disso, a quantidade de cortes que precisariam ser armazenados na ausência do compartilhamento de cortes pode inviabilizar a resolução do problema devido à limitação do armazenamento de dados.

Além disso, conforme comentado anteriormente, no PMO dois modelos computacionais são utilizados, sendo que um deles é o mesmo modelo computacional de médio prazo que é usado no PEN. Nesse programa um dos principais resultados é a FCF, que será usada para acoplar com o modelo computacional de curto prazo do PMO, assim, faz-se necessário ter uma única FCF para cada estágio, que será usada no acoplamento com o segundo programa.

Para poder compartilhar o corte de um cenário com os demais existem dois requisitos. O primeiro, é que o corte seja válido para todos os nós do estágio em que o corte está sendo adicionado. Segundo Infanger e Morton (1996), um Corte de Benders será válido para um determinado nó sempre que a solução dual usada para construir o corte fizer parte do conjunto de soluções viáveis do problema dual dos nós descendentes. Dessa forma, para verificar se um corte pode ser compartilhado com os demais cenários, deve-se averiguar se as soluções duais são viáveis para os demais cenários. Para tanto, considere a formulação (2.42) retirada de (INFANGER e MORTON, 1996) com pequenas modificações.

$$\begin{aligned}
 & \text{Min } c_t^{\omega_t^\top} x_t^{\omega_t} + \alpha_{t+1} \\
 & \text{s.a:} \\
 & A_t^{\omega_t} x_t^{\omega_t} = b_t^{\omega_t} - B_t^{\omega_t} x_{t-1}^{a(\omega_t)}, \\
 & -G_t^{\omega_t} x_t^{\omega_t} + e^\top \alpha_{t+1} \geq g_t^{\omega_t}, \\
 & x_t \geq 0.
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

A formulação apresentada acima considera um problema estocástico com acoplamento temporal e, nesse caso, está sendo avaliado o cenário ω_t . A matriz $B_t^{\omega_t}$ faz a conexão com os estágios anteriores e a matriz $G_t^{\omega_t}$ contém os coeficientes dos Cortes de Benders. Assim, escrevendo o problema dual de (2.42), temos que:

ao compartilhar os cortes, o Conjunto 1 gera um corte para todos os nós do estágio anterior. Isso é possível, visto que as soluções duais do Conjunto 1 são viáveis para o Conjunto 2 e, portanto, assume-se que cada conjunto de nós descendentes está gerando um corte para o seu nó antecessor com as soluções duais do Conjunto 1. Assim, considere o cálculo do corte de Benders abaixo gerado no estágio t para o anterior:

$$\alpha_t + \sum_{\omega \in \Omega} p_t^\omega \pi_t^\top B_t x_{t-1} \geq \sum_{\omega \in \Omega} p_t^\omega (\pi_t^\top b_t^\omega + \eta_t^\top g_t^\omega). \quad (2.44)$$

Nesse caso, α_t e x_{t-1} são variáveis de decisão, π_t são as soluções duais do Conjunto 1, B_t é a matriz que acopla os estágios, sendo iguais para todos os nós do mesmo estágio. Além disso, tem-se que devido ao compartilhamento de cortes o vetor g_t^ω que é composto pelos coeficientes lineares dos Cortes de Benders é o mesmo para todos os nós do estágio também. Dessa forma, o corte (2.44) gerado em cada um dos conjuntos com as soluções duais do Conjunto 1 só será exatamente o mesmo para os demais nós do estágio $t-1$ quando a árvore possuir amostras comuns, isto é, o conjunto das realizações b_t for o mesmo para todos os conjuntos.

Em suma, quando as restrições do problema dual são as mesmas para todos os cenários de um mesmo estágio, pode-se afirmar que a solução ótima de um cenário é uma solução viável em qualquer outro. Portanto, os cortes gerados por um cenário podem sempre ser compartilhados com os demais para o problema em estudo. Se a árvore de cenários não possuir amostras comuns é possível que as soluções duais ainda possam ser compartilhadas, mas é necessário recalcular o corte para cada nó do estágio t considerando as realizações dos seus nós sucessores. É possível que mesmo nesses casos não seja possível compartilhar as soluções duais, pois os cortes podem ter coeficientes, G_t^ω , diferentes em cada nó do estágio t e, com isso, não se garante que a solução dual será viável para todos os nós. Por outro lado, se a árvore possuir amostras comuns é possível compartilhar o corte por si só, sem a necessidade de recálculo. Por estes motivos, o segundo requisito é fortemente desejável.

Dessa forma, após definidos os cenários sorteados e a propriedade de poder compartilhar os cortes de Benders, será apresentado o algoritmo de solução da PDDE, considerando sempre árvore de cenários com amostras comuns, que utiliza uma metodologia bastante similar a DA. Na recursão progressiva mantém-se a estratégia de resolver o problema de cada nó de forma cronológica para $t = 1, 2, \dots, T$; porém, consideram-se apenas os cenários sorteados ao invés da

árvore de cenários completa, conforme ilustrado pela Figura 11. Matematicamente, o problema referente a cada nó do cenário ω_t continua sendo descrito por (2.38).

Da mesma maneira que na DA, avalia-se o critério de parada do algoritmo ao final da recursão progressiva. Considerando que os cenários sorteados são equiprováveis, uma vez que foram sorteados por MC, tem-se que os valores de Z_{INF} e Z_{SUP} são definidos como:

$$Z_{INF} = c_1^T x_1^* + \alpha_2^*, \quad (2.45)$$

$$Z_{SUP} = c_1^T x_1^* + \sum_{t=2}^T \sum_{\omega_t=1}^{N_C} \frac{c_t^T x_t^{\omega_t^*}}{N_C}. \quad (2.46)$$

Em que,

N_C Número de cenários sorteados.

Além disso, é possível definir um custo de cada cenário $\omega - Z_{SUP}^{\omega}$, sendo que, Z_{SUP} é o valor esperado dos custos dos cenários.

$$Z_{SUP}^{\omega} = c_1^T x_1 + \sum_{t=2}^T c_t^T x_t^{\omega_t}. \quad (2.47)$$

Na PDDE os valores de Z_{INF} e Z_{SUP} não são suficientes para definir um critério de parada, pois apenas parte dos cenários são avaliados pela PDDE e, por isso, têm-se apenas um estimador para o limite superior da árvore de cenários. Assim, Pereira e Pinto (1991) propuseram utilizar a informação do desvio padrão dos limites superiores dos cenários (σ_Z) em relação ao valor médio, o qual pode ser obtido pelo seguinte equacionamento:

$$\sigma_Z = \sqrt{\frac{\sum_{\omega \in \Omega} (Z_{SUP} - Z_{SUP}^{\omega})^2}{N_C}}. \quad (2.48)$$

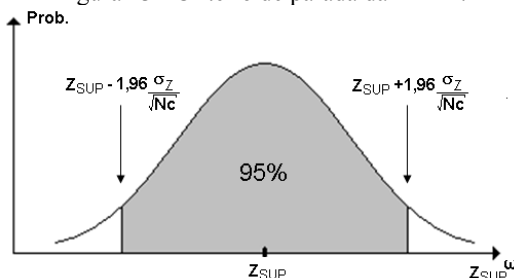
O desvio padrão em (2.48) pode ser calculado pelo equacionamento acima visto que os cenários foram sorteados por MC e, portanto, são independentes entre si. De acordo com a proposta apresentada por (PEREIRA e PINTO, 1991), o algoritmo converge quando o Z_{INF} estiver dentro dos limites estabelecidos em (2.49), o que corresponde a 95% da área sob a curva de função densidade de probabilidade normal, ilustrada pela Figura 13.

$$Z_{SUP} - 1,96 \frac{\sigma_Z}{\sqrt{N_C}} \leq Z_{INF} \leq Z_{SUP} + 1,96 \frac{\sigma_Z}{\sqrt{N_C}}. \quad (2.49)$$

Neste caso, pode-se utilizar uma distribuição Normal uma vez que os valores de N_C são, em geral, elevados, $N_C > 50$. Caso contrário,

seria necessário considerar uma distribuição *t-student*. É importante destacar que esse critério de parada apresenta algumas dificuldades, sendo que a principal delas refere-se ao fato de que o intervalo de confiança aumenta ao se elevar o nível de confiança. Com isso, para níveis maiores de confiança o algoritmo seria parado com políticas de qualidade inferior. Na seção 4.3 deste trabalho e em (HOMEM-DE-MELLO *et al.*, 2011; SHAPIRO, 2011) essas dificuldades são discutidas e sugestões para contorná-las são propostas.

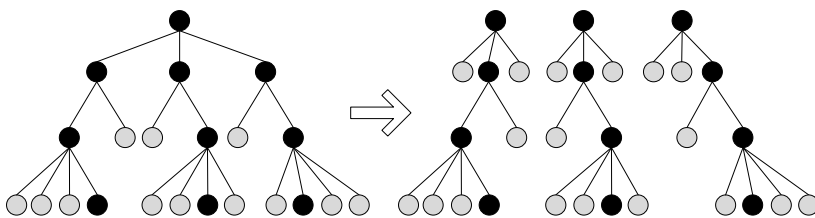
Figura 13 - Critério de parada da PDDE.



No caso do algoritmo não atender ao critério de parada, inicia-se a recursão regressiva, na qual serão calculados e adicionados novos cortes de Benders. Diferentemente da recursão progressiva, não são considerados apenas os nós que compõem os cenários sorteados por MC. Na recursão regressiva deseja-se adicionar um corte de Benders que seja válido para a árvore de cenários, portanto, o corte adicionado deve conter informação de todos os nós descendentes.

Assim a recursão regressiva é ilustrada pela Figura 14, na qual os nós em preto representam os nós que fazem parte do conjunto de cenários sorteados, enquanto que os nós em cinza são os demais nós que compõem a árvore e são considerados nesta etapa do algoritmo. Como os nós pretos foram solucionados na regressão progressiva, todos os nós apresentados na figura têm a condição inicial bem definida pelos valores obtidos na regressão progressiva.

Figura 14 - Recursão regressiva.



Resumindo, pode-se descrever o algoritmo da PDDE como:

Algoritmo 2: Programação Dinâmica Dual Estocástica

1. Faça $it = 0$;
 Adicione um limite inferior para os cortes, $\alpha_{t+1} \geq 0$ para $t = 1, \dots, T-1$;

Recursão Progressiva: 2 a 4

2. Sortear N_C cenários da árvore de cenários;
3. Resolva o problema de primeiro estágio, (2.38) com $t = 1$, e obtenha (x_1^*, α_2^*) e
 Calcule Z_{INF} (2.45)
4. Faça de $t = 2$ a T
 Faça para $i = 1$ a N_C
 Definir ω_t do cenário i ;
 Resolva o problema (2.38) do estágio t e realização $\xi_t^{\omega_t}$
 e obtenha $x_t^{\omega_t^*}$;
 Fim
 Fim
 Calcule Z_{SUP} (2.46) e σ_Z (2.48)
5. Testa o critério de parada (2.49). Em caso positivo, pare.

Recursão Regressiva: 6

6. Faça de $t = T-1$ a 1
 Faça de $i = 1$ a N_C
 Definir ω_t do cenário i ;
 Faça para $\omega_{t+1} \in \Delta(\omega_t)$
 Resolva o problema (2.38) do estágio $t+1$ e
 realização $\xi_{t+1}^{\omega_{t+1}}$ e obtenha os $\pi_{t+1}^{\omega_{t+1}*}$ e $z_{t+1}^{\omega_{t+1}*}$;
 Fim
 Com os resultados calcule o Corte (2.41) e adicione ao
 estágio t ;
 Fim
 Fim.
7. Faça $it = it + 1$ e vá ao passo 2.

2.6 AVALIANDO CANDIDATOS À SOLUÇÃO

Até o momento foram discutidas as metodologias utilizadas nesse trabalho para a modelagem da variável aleatória por meio de uma árvore de cenários e a estratégia de solução para encontrar um candidato a solução ótima. Neste caso tem-se apenas um candidato, pois aproximou-se o problema original que tinha função densidade de probabilidade contínua e a estratégia de solução que é a PDDE visita apenas alguns cenários da árvore. Assim, dado um ponto candidato $x_1' \in X_1$, uma questão prática é como avaliar a qualidade do ponto de vista do problema original, que será discutida nesta seção.

A avaliação da política é importante não apenas para aferir a qualidade da solução, mas, também, para ajudar na escolha do tamanho da amostra e de critérios de parada dos algoritmos. Existem basicamente três estratégias para tal análise de validação. É possível tentar estimar o gap de otimalidade, avaliar as condições de otimalidade de primeira ordem associadas com o ponto viável fornecido, ou fazer a avaliação com base nas variáveis duais (HIGLE e SEN, 1996). Neste trabalho será dada atenção somente para a primeira opção (RUSZCZYNSKI e SHAPIRO, 2003), conforme mostrado a seguir.

Dado que x_1' é um candidato e, portanto, viável, tem-se claramente que $z(x_1') \geq z^*$, em que $z^* = z(x^*) = \min z(x)$, tal que $x^* \in X$, é o valor ótimo do problema original. A qualidade de x_1' pode ser medida então pelo gap de otimalidade:

$$gap(x_1') = z(x_1') - z^*. \quad (2.50)$$

Entretanto, ambos os valores em (2.50), $z(x_1')$ e z^* , não podem ser obtidos na maioria dos casos práticos. Isto porque, se fosse possível obter z^* não faria sentido a redução do problema por meio da árvore de cenários e do sorteio de cenários na PDDE. Da mesma forma, $z(x_1')$ precisaria ser estimado considerando a função densidade de probabilidade contínua original, que no caso multiestágio é de difícil solução mesmo quando se quer avaliar o valor para uma decisão específica x_1' .

Dessa forma, torna-se necessário estimar os valores em (2.50), o que é feito ao definir um limite superior para o $z(x_1')$ e um limite inferior para o z^* . Assim, tem-se na prática um intervalo que com um determinado nível de confiança sabe-se que o *gap* de otimalidade não será maior que esse valor.

Inicialmente será calculado o limite superior para $z(x_1')$, o qual pode ser feito via simulação de MC. Isto é, sorteia-se um conjunto de

realizações iid diretamente da FDP original, dado por ξ^ω , $\omega = 1, \dots, Nu$, sendo que para cada ξ^ω pode-se determinar o valor de $q(x_1', \xi^\omega)$ e, com isso, tem-se que:

$$q_{Nu}(x_1') := \frac{1}{Nu} \sum_{\omega=1}^{Nu} q(x_1', \xi^\omega), \quad (2.51)$$

Assim, $q_{Nu}(x_1')$ é um estimador não enviesado de $z(x_1')$, que tem variância

$$\sigma_{Nu}^2(x_1') := \frac{1}{Nu} \sum_{\omega=1}^{Nu} \left[q(x_1', \xi^\omega) - q_{Nu}(x_1') \right]^2, \quad (2.52)$$

Como o estimador $q_{Nu}(x_1')$ é calculado via simulação de MC, note que é viável utilizar aqui um número grande para a amostra Nu , pois o cálculo dos valores de $z(x_1', \xi^j)$ envolve resolver problemas individuais do segundo estágio. Então, é possível definir o limite superior para $z(x_1')$ com $100(1-\alpha)\%$ de confiança, de acordo com o seguinte equacionamento:

$$U_{Nu}(x_1') := q_{Nu}(x_1') + v_{1-\alpha} \frac{\sigma_{Nu}(x_1')}{\sqrt{Nu}}, \quad (2.53)$$

Este limite é justificado pelo Teorema do Limite Central com um valor crítico $v_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1-\alpha)$, em que $\Phi(v_{1-\alpha})$, é a função de distribuição acumulada da distribuição Normal. Por exemplo, para $\alpha = 5\%$ tem-se que $v_{1-\alpha} \approx 1,64$ e para $\alpha = 1\%$ tem-se que $v_{1-\alpha} \approx 2,33$.

Para calcular um limite inferior para z^* , inicialmente considere que z_n é o valor ótimo de um problema de SAA calculado para uma árvore de cenários de tamanho n . Note que z_n é função da árvore de cenários que é obtida por meio de um sorteio aleatório (Monte Carlo) e, portanto é valor aleatório também. Como a árvore de cenários é um subconjunto do problema original para o qual se encontrou a solução ótima, é possível inferir que $z^* \geq E[z_n(x)]$, veja (SHAPIRO e PHILPOTT, 2009) para mais detalhes. Assim, com $E[z_n(x)]$ é possível construir um limite inferior para z^* .

É possível estimar $E[z_n]$ resolvendo-se um conjunto de problemas SAA que foram sorteados da mesma função densidade de probabilidade e calculando o valor esperado dos valores ótimos. Isto é, M problemas de SAA baseados em amostras geradas de forma independente, cada um com árvore de cenários de tamanho n , são resolvidos. Seja z_n^1, \dots, z_n^M as soluções ótimas calculadas destes problemas de SAA. Então,

$$\bar{z}_{nM} := \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M z_n^j, \quad (2.54)$$

é um estimador não enviesado de $E[z_n]$. Como as amostras, z_n^1, \dots, z_n^M , são independentes, é possível estimar a variância de (2.54) por:

$$\sigma_{nM}^2 := \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M (z_n^j - \overline{z_{nM}})^2. \quad (2.55)$$

Com isso, um limite inferior com nível de confiança de $100(1-\alpha)\%$ para $E[z_n]$ e, portanto, é um limite inferior para z^* , é dado por:

$$L_{nM} := \overline{z_{nM}} - t_{\alpha, \nu} \frac{\sigma_{nM}}{\sqrt{M}}, \quad (2.56)$$

Em que $\nu = M - 1$ e $t_{\alpha, \nu}$ é o valor crítico de α da distribuição *t-student* com ν graus de liberdade. Conforme discutido, para encontrar o limite inferior é necessário resolver inúmeros problemas de otimização estocástica, fato que pode demandar um elevado esforço computacional. Assim, em aplicações práticas é, em geral, suficiente usar pequenos valores para M , tais como $M = 5$ ou $M = 10$ (SHAPIRO e PHILPOTT, 2009). Para um pequeno número de graus de liberdade, o valor crítico de $t_{\alpha, \nu}$ é um pouco maior que o valor correspondente de $\nu_{1-\alpha}$, sendo que $t_{\alpha, \nu}$ se aproxima rapidamente de $\nu_{1-\alpha}$ quando ν é incrementado.

Com os limites inferior e superior definidos é possível construir um Intervalo de Confiança (IC) para o *gap* de otimalidade, que é definido por:

$$IC(x_1') := U_{Nu}(x_1') - L_{nM}, \quad (2.57)$$

O IC fornece um limite estatístico válido (com intervalo de confiança de pelo menos $1 - 2\alpha$) para o verdadeiro *gap* (2.50). Deve-se notar que (2.57) é de natureza conservadora uma vez que a diferença entre $z^* - E[z_N]$ do estimador de SAA em relação ao verdadeiro valor ótimo pode ser significativa para árvore de cenários não muito representativas, isto é, para valores não muito grandes de amostra n .

No caso da PDDE ao invés de ser fornecida uma única solução tem-se um mapeamento dos custos esperados futuros que define a política de operação. Dessa forma, na PDDE ao invés de verificar se uma dada solução de primeiro estágio é de boa qualidade, deseja-se na prática avaliar a qualidade da política de operação. Essa avaliação é feita da mesma maneira que foi discutida ao longo desta seção, calcula-se um limite superior e inferior para obter um intervalo de confiança do *gap* de otimalidade. Mais detalhes de como esses limites são calculados podem ser encontrados na Seção 4.4 deste documento.

2.6.1 Exemplo do Problema do Estoque

Para ilustrar o procedimento de avaliação da qualidade da solução, até aqui descrito, considere o mesmo exemplo da Seção 2.1, em que:

$$z(x, \xi^\omega) = \begin{cases} -0,5x + 1,5\xi^\omega, & \text{se } x < \xi^\omega \\ 1,1x - 0,1\xi^\omega, & \text{se } x \geq \xi^\omega, \end{cases} \quad (2.58)$$

e para $\xi \in [0, 100]$ e uniformemente distribuído no intervalo,

$$z(x) = E[z(x, \xi)] = 75 - 0,5x + 0,008x^2, \quad (2.59)$$

Com isso é possível encontrar a solução ótima em $x^* = 31,25$ para a qual se obtém o valor mínimo de $z^* = 67,10$. Considere que se deseja avaliar uma solução candidata $x = 40$. Nesse caso como foi possível obter a função que descreve a decisão x em função da FDP de ξ (2.59), torna-se fácil calcular o valor desse candidato para o problema original:

$$z(40) = E[z(40, \xi)] = 67,80. \quad (2.60)$$

Com isso, tem-se que o *gap* de otimalidade é dado por:

$$\begin{aligned} gap(x = 40) &= z(40) - z^*, \\ gap(x = 40) &= 67,80 - 67,10, \\ gap(x = 40) &= 0,70 \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$gap(x = 40) = \frac{0,70}{67,10} 100\% = 1,04\%$$

Entretanto, suponha que não seja possível calcular o custo para uma dada decisão $x = 40$ e que não se conheça o valor ótimo do problema, z^* . Nesse caso, devem-se calcular os limites superior e inferior conforme discutido anteriormente. Para obter limite superior para a decisão $x = 40$, sorteiam-se Nu valores da distribuição de ξ ; assim, tem-se $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{Nu}$. Nesse sentido, considere o seguinte conjunto de 16 amostras $\{1, 11, 26, 26, 36, 45, 45, 46, 50, 54, 56, 56, 59, 62, 70, 98\}$ ⁸. Com $Nu = 16$, isso fornece um custo estimado de

$$\begin{aligned} z_{Nu}(x') &= \frac{1}{16} \sum_{\omega=1}^{16} z(40, \xi^\omega) \\ &= \frac{1}{16} \left(\sum_{\omega=1}^5 z(44 - 0,1\xi^\omega) + \sum_{\omega=6}^{16} z(-20 + 1,5\xi^\omega) \right) = 59,47, \end{aligned} \quad (2.62)$$

⁸ Os valores estão arredondados para números inteiros.

e $\sigma_{Nu}^2(x') = 497,996$. Assim, que o limite superior com 95% de confiança para $E[z(40, \xi)]$ é

$$U_{Nu}(40) = z_{Nu}(40) + v_{1-0,05} \frac{\sigma_{Nu}(40)}{\sqrt{Nu}} \quad (2.63)$$

$$U_{Nu}(40) = 59,47 + 1,64 \frac{\sqrt{497,996}}{\sqrt{16}} = 68,62.$$

O cálculo relacionado com o limite inferior é um pouco mais complicado. Neste caso, apresentam-se os resultados executados com $M = 9$ problemas de SAA, cada um com $n = 5$. Os resultados para z_n são: {56,39; 35,26; 59,53; 77,97; 54,87; 42,95; 68,52; 61,99; 78,93}. O valor esperado de z_n é 59,60 e a variância da amostra é $\sigma_{nM}^2 = 212,34$ e $t_{0,05;8} = 1,86$, o que fornece o seguinte limite inferior aproximado com 95 % de confiança para $E[z_N]$:

$$L_{nM} := \overline{v_{nM}} - t_{\alpha,v} \frac{\sigma_{nM}}{\sqrt{M}} = 59,60 - 1,86 \frac{\sqrt{212,34}}{\sqrt{9}} = 50,57. \quad (2.64)$$

Das equações acima há o intervalo de confiança $IC = 68,62 - 50,57 = 18,05$ para um nível de confiança de 90% no verdadeiro valor do *gap*, que em termos percentuais é de 30,28% em relação ao limite inferior de 59,60. Ao comparar com o valor real do *gap* para $x = 40$ em (2.61), verifica-se que o IC é substancialmente maior do que o *gap*. Uma estratégia que pode reduzir esse valor é aumentar n para um valor maior que 5. Ressalta-se que o valor de IC tende a ser de pior qualidade à medida que o horizonte T aumenta.

2.7 CONCLUSÃO

Ao longo deste capítulo foram discutidos os conceitos mais importantes de otimização estocástica, para problemas de dois e T estágios, dentro do contexto deste trabalho. A otimização estocástica é a principal ferramenta para tomada de decisões quando se tem alguma incerteza no futuro, como por exemplo, custos e demandas. Em geral, esse tipo de problema é modelado por meio de variáveis aleatórias com função de densidade de probabilidade conhecidas.

Inicialmente, foi apresentada a importância da amostragem para a solução de problemas reais, visto que para problemas com FDPs contínuas ou discretas contendo muitos pontos, o problema fica inviável de ser solucionado, principalmente, no caso multiestágio, que é o foco deste trabalho. Nesse capítulo, utilizou-se a técnica de amostragem

conhecida como Monte Carlo para discutir os principais conceitos, como a geração da árvore de cenários.

A geração da árvore de cenários é uma das etapas mais importantes de um problema de otimização estocástica, visto que a topologia da árvore vai definir o quão bem o problema real será modelado e poderá também limitar o uso de algumas estratégias de solução. Este é o caso da PDDE em que se deseja uma árvore de cenários com amostras comuns para poder compartilhar os cortes de Benders, que é um aspecto importante para que o algoritmo da PDDE funcione de maneira eficiente.

A PDDE foi apresentada com base na Decomposição Aninhada, visto que as estratégias são muito parecidas. A principal diferença entre elas é que a DA é utilizada para resolver o problema relacionado a toda a árvore de cenários, enquanto que a PDDE é usada para resolver árvores de cenários muito grandes e que não podem ser solucionadas completamente.

Por fim, discutiu-se a metodologia para avaliar a qualidade da solução encontrada perante o problema real, uma vez que tanto a DA quanto a PDDE resolvem um problema que é apenas uma aproximação do problema real. Ao longo de todo capítulo foi utilizado um exemplo numérico simples com o objetivo de esclarecer os principais aspectos da otimização estocástica.

3. PLANEJAMENTO ANUAL DA OPERAÇÃO ENERGÉTICA

Conforme comentado na Introdução deste documento, o PEN pode ser matematicamente representado por um problema de programação estocástica linear de grande porte com acoplamento temporal e espacial. Este é um problema bastante complexo que requer aproximações no problema estocástico e na modelagem do problema. Nesse sentido, este capítulo apresenta as principais características da modelagem e da estratégia de solução do PEN.

Primeiramente, faz-se necessário reduzir a quantidade de UHEs, visto que estas são responsáveis pela maior quantidade de variáveis e restrições do problema. De acordo com (ARVANITIDIS e ROSING, 1970a), quando uma sequência de decisões mensais do total de energia hidrelétrica tem maior importância econômica do que a alocação dessa energia a cada UHE, pode-se utilizar a representação por Reservatório Equivalente de Energia (REE). Isso ocorre quando as afluições são incertas e o mercado a ser atendido pelas usinas hidrelétricas é flexível, isto é, quando as UHEs são usadas não somente para atender a demanda, mas também para deslocar a ordem de mérito das usinas termelétricas e a importação de energia. Este é o caso do PEN e, portanto, pode ser justificada a representação por REE.

Na representação por REE este trabalho considera que as usinas hidrelétricas podem ser agregadas por SubSistema Elétrico (SSE) em um único reservatório equivalente. Dessa forma, tem-se, então, variáveis que representam decisões em energia em vez de água; isto é, depleciona-se e/ou armazena-se energia nos REEs. Além da redução significativa no número de variáveis do problema, esta modelagem “elimina” o acoplamento espacial entre as UHEs de uma mesma cascata, uma vez que o cálculo dos atributos do REE já considera este acoplamento. Por ser um modelo simplificado pode-se perder a precisão na operação real de cada reservatório; entretanto, a representação por usinas individualizadas, mantendo-se todo o detalhamento ao longo do horizonte de estudo, é de difícil solução no estudo do PEN. A aproximação por REE é uma metodologia que permite compromisso adequado entre a modelagem das usinas hidrelétricas e o desempenho computacional.

A geração dos cenários para o problema de otimização estocástica é feita com base na série histórica das energias afluentes, que é definida como a energia gerada pelas afluições a todas as UHEs pertencentes ao REE. No SIN, o custo de operação em estágios futuros

depende das afluências que irão ocorrer e que têm um alto grau de incerteza associado. Nesse sentido, é importante estudar o comportamento estatístico das afluências para se ter uma quantificação do custo futuro. Nessa direção, a Seção 3.2 discutirá o modelo ARP(p) que é atualmente usado no PEN para a geração da árvore de cenários.

Na sequência, com a modelagem do problema definida e usando o REE e a árvore de cenários sorteada, apresenta-se a formulação do PEN na Seção 3.3 e faz-se necessário definir a estratégia de solução. Neste trabalho optou-se por usar a Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE), que já foi apresentada inicialmente no capítulo anterior, como estratégia base para o desenvolvimento dos estudos. Dessa forma, a Seção 3.4 discute os detalhes desse algoritmo aplicado ao PEN; visto que devido à representação por REE e o uso do modelo ARP(p), a PDDE precisa de alguns ajustes no cálculo dos cortes de Benders. Por fim, a Seção 3.5 apresenta alguns aspectos problemáticos da modelagem atual que é discutida neste capítulo.

3.1 RESERVATÓRIO EQUIVALENTE DE ENERGIA

Conforme comentado, a representação de UHEs por meio de REEs é uma das simplificações utilizadas para reduzir o esforço computacional do problema do PEN. Nesse sentido, esta seção apresentará a descrição dos atributos que descrevem o REE, bem como a formulação matemática para calculá-los. Esta seção foi desenvolvida com base no documento de referência do modelo NEWAVE, desenvolvido pelo Centro de Pesquisas de Energia Elétrica (CEPEL) (CEPEL, 2001).

A principal distinção entre a representação a usinas individualizadas e a REEs é que nesta última tem-se que as variáveis se referem a decisões de energia (MWmês) produzida. No caso individualizado, essas decisões são de volumes (hm^3) e vazões (m^3/s). A Tabela 1 apresenta a relação de atributos que descrevem os REEs com a respectiva notação e uma breve descrição, a definição dos atributos será feita em mais detalhes ao longo desta seção.

É importante destacar que, ao longo desta seção, as usinas referidas nas subseções e equacionamentos associados fazem parte do mesmo REE. Dessa forma, estimam-se os atributos apresentados neste capítulo para cada reservatório equivalente de energia que compõe o sistema. Além disso, as usinas com reservatórios com capacidade de regularização serão denominadas de usinas com reservatório ou apenas reservatórios, enquanto as demais serão tratadas por usina a fio d'água.

Ressalta-se, também, que a modelagem e formulação matemática é a mesma para os REEs agregados por SSE e Bacia Hidrográfica.

Tabela 1 - Relação de atributos dos REEs.

Atributos	Notação	Descrição (Energia que pode ser gerada pela(o)...)
Energia Armazenada	v	Água armazenada nos reservatórios
Energia Armazenável Máxima	v^{max}	Água que pode ser armazenada nos reservatórios
Energia Armazenável Máxima por Volume de Espera	v^{max_op}	Água que pode ser armazenada nos reservatórios, considerando o volume de espera
Energia Armazenável Mínima por Limites Operativos	v^{min}	Água que deve ser armazenada nos reservatórios, no mínimo, para a operação das usinas
Energia Afluente	y	Afluência a todas as usinas
Energia Controlável	yc	Afluência aos reservatórios, cuja energia associada pode ser armazenada
Energia Fio d'Água Bruta	yb	Afluência às usinas a fio d'água, cuja energia associada não pode ser armazenada
Perdas de Energia Fio d'Água	yp	Perdas nas usinas fio d'água devido a limites de operação
Energia Fio d'Água	yf	Afluência às usinas a fio d'água, considerando as perdas por limite de operação
Energia Vertida	s	Vazão vertida
Energia de Vazão Mínima	q^{min}	Vazão mínima turbinada
Energia Gerada	gh	Vazão turbinada, sem considerar a vazão mínima
Geração Hidráulica Máxima	gh^{max}	Limite máximo de geração das usinas
Energia Evaporada	ev	Água evaporada dos reservatórios
Energia de Desvio Controlável	qc	Água desviada logo antes dos reservatórios

Energia de Desvio Fio d'Água	qf	Água desviada logo antes das usinas fio d'água
Energia de Usinas Submotorizadas	es	Produção das usinas que foram construídas, mas não estão totalmente comissionadas
Geração de Pequenas Usinas	gp	Usinas com capacidade menor que 30 MW.
Energia de Volume Morto	vm	Água para a usina atingir o volume mínimo

Além dos atributos da tabela acima, existem dois fatores de correção que fazem parte dos atributos do REE: (i) Fator de correção de energia armazenada (fv), que ajusta a energia armazenada quando há alteração na configuração hidrelétrica (à frente ficará mais claro o que é uma configuração hidrelétrica) e; (ii) Fator de correção de energia controlável (fc), que corrige a energia controlável de acordo com a energia armazenada no REE.

É importante ressaltar que os atributos Energia Armazenada, Vertida e Gerada são variáveis de decisão do modelo e, portanto, não serão discutidos em mais detalhes neste capítulo. Os demais serão discutidos detalhadamente e os respectivos equacionamentos apresentados.

Antes de apresentar as formulações dos atributos dos REEs, faz-se necessário destacar alguns aspectos importantes:

- Na base de dados as Usinas a Fio d'água são identificadas por um flag; entretanto, são consideradas usinas a fio d'água também aquelas que tiverem reservatórios com um volume útil inferior ou igual a 10 hm³; e
- No cálculo dos atributos, a altura de montante, do nível do reservatório, das usinas a fio d'água será o valor de referência fornecido na base de dados.

3.1.1 Energia Armazenável Máxima

A Energia Armazenável Máxima é a máxima quantidade de energia que é gerada ao se deplecionar completamente os reservatórios de todas as usinas hidrelétricas do volume máximo até o volume mínimo, segundo uma regra de operação. Deste modo, pode ser definida como a capacidade máxima de armazenamento do REE. No modelo desenvolvido, assim como no NEWAVE, o deplecionamento dos reservatórios ocorre segundo uma operação em paralelo, ou seja,

mantendo-se a mesma proporção de volume útil armazenado entre os vários reservatórios (MERCIO, 2000) Outras regras de operação para o cálculo dos REEs são descritas em (SOARES e CARNEIRO, 1993) e (CRUZ e SOARES, 1996).

A energia armazenável máxima é calculada pela soma dos produtos das produtibilidades específicas⁹ pelas quedas líquidas médias¹⁰ do próprio reservatório e das usinas a jusante do reservatório, multiplicada pelo volume útil do reservatório. Note que neste caso ignoram-se limites de turbinamento e capacidade de armazenamento das usinas.

Assim, a energia armazenável máxima é dada por:

$$v^{\max} = \frac{1}{2,63} \sum_{i \in R} \left[Vu_i \sum_{j \in J_i} (\rho_j H_j^{\text{med}}) \right], \quad (3.1)$$

em que:

v^{\max}	Energia armazenável máxima (MWmês);
R	Conjunto de reservatórios do REE;
i	Índice de reservatórios, tal que $i \in R$;
Vu_i	Volume útil ¹¹ do reservatório i (hm ³);
J_i	Conjunto de usinas a jusante do reservatório i inclusive;
j	Índice de usinas, tal que $j \in J_i$;
ρ_j	Produtibilidade específica da usina j (MW/m ³ /s/m);
H_j^{med}	Queda líquida média das usinas com reservatórios e queda líquida das usinas a fio d'água (m).

A divisão por 2,63 é necessária para ajustar a unidade de volume (hm³) com a unidade da produtibilidade específica (MWmês/m³/s/m). Este cálculo é feito considerando que um mês tem 30,43 dias, o que equivale à duração de um mês equivalente e com número de dias igual para todos os meses do ano (365,25/12).

Outro atributo importante que será utilizado na formulação dos demais atributos é a Energia Armazenada com os reservatórios em 65% do volume útil armazenado, pois, como será mostrado ao longo desta seção, este valor é utilizado em alguns atributos do REE para definir

⁹ A produtibilidade específica é um coeficiente que indica a quantidade de energia gerada para cada l (m³/s) de vazão turbinada e l (m) de queda líquida.

¹⁰ A queda bruta média é a diferença entre a altura média de montante do reservatório, que é obtida ao integrar o polinômio de cota de montante em relação ao Volume, e a altura do canal de fuga médio. No horizonte de médio prazo a altura a jusante do reservatório é considerada constante e igual ao valor do canal de fuga médio, definido na Base de Dados. Dessa forma, para calcular a queda líquida média deve-se subtrair da queda bruta as perdas hidráulicas.

¹¹ O volume útil de um reservatório é dado pela diferença entre o volume máximo e mínimo do mesmo.

uma equação de segundo grau que será usada na formulação do problema. Esse atributo é denominado de Energia Armazenada Equivalente (v^{eq}) e pode ser obtida pelo equacionamento:

$$v^{eq} = \frac{1}{2,63} \sum_{i \in R} \left[0,65 V u_i \sum_{j \in J_i} (\rho_j H_j^{med_eq}) \right], \quad (3.2)$$

em que:

$H_j^{med_eq}$ Queda líquida média equivalente¹² das usinas com reservatórios e queda líquida das usinas fio d'água (m).

3.1.2 Energia Afluente

A Energia Afluente, também denominada de Energia Natural Afluente, é a energia que pode ser gerada a partir das afluições. No cálculo da energia afluente pode-se usar as afluições natural ou incremental. Na primeira considera-se a afluição total que chega à usina, enquanto a segunda refere-se apenas a afluição decorrente da área de drenagem da bacia hidrológica situada entre a usina em questão e os aproveitamentos imediatamente a montante. Dessa forma, a afluição incremental pode ser calculada como a afluição natural da usina menos a afluição natural das usinas a montante. No caso desse trabalho optou-se por utilizar a afluição natural para o cálculo da energia afluente.

Como a afluição de uma usina chegará a todas as usinas a jusante quando for turbinada ou vertida, tem-se que todas as usinas a jusante devem ser consideradas para valorar a afluição como energia. No entanto, precisa-se diferenciar a energia gerada pelas afluições aos reservatórios e às usinas a fio d'água, uma vez que apenas a energia afluente aos reservatórios pode ser armazenada.

Desta forma, divide-se a energia afluente em *Energia Controlável* (referente aos reservatórios) e *Energia Fio D'Água* (referente às usinas a fio d'água). Assim, calcula-se um histórico da energia controlável e fio d'água, cuja soma fornece o histórico da energia afluente. Esta seção apresentará a definição e a modelagem matemática da energia controlável e fio d'água, bem como as correções que devem ser feitas ao longo do estudo.

¹² A queda bruta média equivalente é a diferença entre a altura média de montante do reservatório, que é obtida ao integrar o polinômio de cota de montante do volume mínimo a 65% do volume útil, e a altura do canal de fuga médio. Dessa forma, para calcular a queda líquida média equivalente deve-se subtrair da queda bruta equivalente as perdas hidráulicas.

3.1.2.1 Energia Controlável

A energia controlável é a quantidade de energia gerada pelas afluições aos reservatórios, considerando que a afluição seja totalmente transformada em energia pelo reservatório e pelas usinas a fio d'água situadas entre o reservatório e o próximo imediatamente a jusante.

Dessa maneira, a energia controlável é calculada para cada mês do histórico como a soma da afluição natural a cada reservatório, multiplicada pela soma do produto das produtibilidades específicas do reservatório pela sua queda líquida equivalente¹³ com a soma dos produtos das produtibilidades específicas das usinas a fio d'água a jusante pela sua respectiva queda líquida até o próximo reservatório, exclusive. Note que se deve valorar a energia apenas até antes do próximo reservatório, pois a água que chega a esse reservatório já está considerada em sua afluição natural.

Assim, a energia controlável de um mês t e ano k é dada por:

$$y_{C_{tk}} = \sum_{i \in R} \text{aflu}_{itk} \left(\rho_i H_i^{eq} + \sum_{f \in F_i} (\rho_f H_f) \right), \quad (3.3)$$

em que:

$y_{C_{tk}}$	Energia controlável no mês t e ano k (MWmês);
F_i	Conjunto de usinas a fio d'água a jusante do reservatório i até o próximo reservatório, exclusive;
f	Índice de usinas, em que $f \in F_i$;
aflu_{itk}	Afluição natural ao reservatório i no mês t e ano k (m ³ /s);
H_i^{eq}	Queda líquida equivalente do reservatório i (m);
H_f	Queda líquida da usina f (m).

3.1.2.2 Correção da Energia Controlável

Conforme apresentado em (3.3) a energia controlável é calculada considerando a queda líquida equivalente de cada reservatório. Entretanto, sabe-se que os armazenamentos dos reservatórios oscilam ao longo do tempo e, portanto, a queda também se altera. Por conseguinte, a EC é calculada considerando uma altura equivalente de referência

¹³ A queda bruta equivalente é a diferença entre a altura de montante do reservatório, referente a 65% do volume útil, e a altura do canal de fuga médio. Assim, para obter a queda líquida equivalente devem-se descontar as perdas hidráulicas da queda bruta equivalente.

(3.3) e, assim, faz-se a correção da energia controlável em função do armazenamento do reservatório. Contudo, como não se conhece de antemão o armazenamento de cada reservatório durante o estudo, pois se tem um único reservatório no REE que representa o conjunto de usinas, deve-se definir uma alternativa para corrigir a energia controlável devido à mudança da queda dos reservatórios.

Nesse sentido, considera-se que a proporcionalidade entre as energias controláveis irá se manter, ou seja, o percentual de contribuição de cada reservatório à energia controlável total é o mesmo ao longo de todo estudo. Assim, pode-se calcular uma correção relativa ao conjunto de usinas. Para tanto, calcula-se para cada mês uma energia controlável máxima, média, mínima e equivalente, considerando as quedas líquidas com volumes máximo, equivalente e mínimo¹⁴ e queda líquida equivalente, respectivamente.

Dessa forma, obtêm-se relações entre as energias controláveis máxima, média e mínima e a energia controlável equivalente, cujo equacionamento (3.3) foi utilizado para calcular o histórico de energia controlável, que são dadas por:

$$fc_t^{\max} = \frac{\sum_{k=1}^A yc_{ik}^{\max}}{\sum_{k=1}^A yc_{ik}^{eq}} = \frac{\sum_{k=1}^A \sum_{i \in R} aflu_{ik} \left(\rho_i H_i^{\max} + \sum_{f \in F_i} (\rho_f H_f) \right)}{\sum_{k=1}^A \sum_{i \in R} aflu_{ik} \left(\rho_i H_i^{eq} + \sum_{f \in F_i} (\rho_f H_f) \right)}, \quad (3.4)$$

$$fc_t^{\text{med}} = \frac{\sum_{k=1}^A yc_{ik}^{\text{med}}}{\sum_{k=1}^A yc_{ik}^{eq}} = \frac{\sum_{k=1}^A \sum_{i \in R} aflu_{ik} \left(\rho_i H_i^{eq} + \sum_{f \in F_i} (\rho_f H_f) \right)}{\sum_{k=1}^A \sum_{i \in R} aflu_{ik} \left(\rho_i H_i^{eq} + \sum_{f \in F_i} (\rho_f H_f) \right)} = 1, \quad (3.5)$$

$$fc_t^{\min} = \frac{\sum_{k=1}^A yc_{ik}^{\min}}{\sum_{k=1}^A yc_{ik}^{eq}} = \frac{\sum_{k=1}^A \sum_{i \in R} aflu_{ik} \left(\rho_i H_i^{\min} + \sum_{f \in F_i} (\rho_f H_f) \right)}{\sum_{k=1}^A \sum_{i \in R} aflu_{ik} \left(\rho_i H_i^{eq} + \sum_{f \in F_i} (\rho_f H_f) \right)}, \quad (3.6)$$

em que:

¹⁴ As quedas brutas com os volumes máximo, equivalente e mínimo são obtidas a partir do polinômio cota-volume, pela diferença entre a altura do reservatório quando do armazenamento máximo, equivalente (65% do volume útil) e mínimo, respectivamente, e o canal de fuga médio. Subtraem-se, então, as perdas hidráulicas para determinar a queda líquida.

fc_t^{\max}	Fator de correção da energia controlável para queda máxima no mês t ;
fc_t^{med}	Fator de correção da energia controlável para queda média no mês t ;
fc_t^{\min}	Fator de correção da energia controlável para queda mínima no mês t ;
A	Total de anos no histórico;
k	Índice de anos do histórico, $k = 1, 2, \dots, A$;
yc_{tk}^{\max}	Energia controlável máxima no mês t do ano k (MWmês);
yc_{tk}^{med}	Energia controlável média no mês t do ano k (MWmês);
yc_{tk}^{\min}	Energia controlável mínima no mês t do ano k (MWmês);
yc_{tk}^{eq}	Energia controlável equivalente no mês t do ano k (MWmês);
$aflu_{itk}$	Afluência natural ao reservatório i no mês t do ano k (m^3/s);
H_i^{vmax}	Queda líquida para o volume máximo da usina i (m);
H_i^{vmin}	Queda líquida para o volume mínimo da usina i (m).

Como ao longo do estudo a energia armazenada do REE pode estar em qualquer valor dentro dos limites estabelecidos $[0, v^{\max}]$, define-se, então, uma parábola para cada mês, que fornecerá o fator de correção da energia controlável em função do nível de armazenamento. Assim, com os três pontos compostos pelo fator de correção e armazenamento do REE, $(v^{\max}; fc_t^{\max})$, $(v^{\text{eq}}; fc_t^{\text{med}})$ e $(0; fc_t^{\min})$, ajusta-se uma parábola por mínimos quadrados, conforme apresentado ilustrativamente na Figura 15 para o mês de Janeiro do Reservatório Equivalente de Energia do Subsistema SE/CO (Sudeste/Centro-oeste), cuja expressão é dada por:

$$fc_t(v) = bf_{2t}v^2 + bf_{1t}v + bf_{0t}, \quad (3.7)$$

em que:

fc_t	Fator de correção da energia controlável no mês t ;
v	Energia armazenada inicial do estágio em estudo (MWmês);
bf_{pt}	Coefficientes da parábola no mês t , tal que $p = 0, 1$ e 2 .

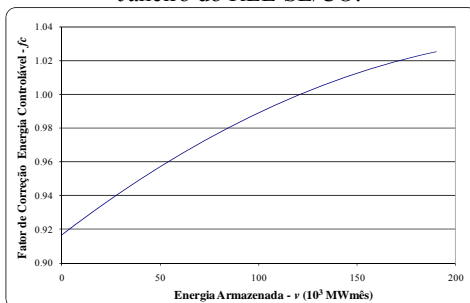
Assim, a energia controlável corrigida é dada por:

$$yc_t^{co} = fc_t(v)yc_t, \quad (3.8)$$

em que:

yc_t^{co}	Energia controlável corrigida no mês t (MWmês).
-------------	---

Figura 15 - Parábola do Fator de correção da energia controlável no mês de Janeiro do REE SE/CO.



3.1.2.3 Energia Fio D'Água

A energia fio d'água é composta pela soma das energias que são geradas pelas afluições incrementais às usinas a Fio D'Água. Como parte das afluições dessas usinas advém da defluência¹⁵ dos reservatórios a montante, deve-se desconsiderar essa parcela que já foi considerada no cálculo da energia controlável. Note que, por "reservatórios a montante" entende-se o conjunto de reservatórios imediatamente a montante na cascata ao ignorar as demais usinas a fio d'água e usinas com reservatório em construção.

Como as usinas a fio d'água não têm reservatório com capacidade de regularização, ou seja, precisam turbinar ou verter toda a afluição, faz-se necessário considerar o limite de turbinamento máximo dessas usinas no cálculo da energia fio d'água. Contudo, ao agregar as usinas na representação por REE fica difícil de mensurar essa limitação, já que não se sabe quanto da energia fio d'água é destinada a cada usina. Por isso, determinam-se duas energias fio d'água de maneira que se torna possível obter um fator de perdas e, assim, corrigir os valores devido à limitação de turbinamento máximo. As duas energias calculadas são:

- Energia Fio D'Água Bruta: ignora a limitação;
- Energia Fio D'Água: considera a limitação.

A energia fio d'água bruta é dada pela soma da diferença entre as afluições naturais às usinas a fio d'água e afluições aos reservatórios a montante, multiplicada pela soma da produtibilidade específica e queda líquida da usina, da seguinte maneira:

¹⁵ A defluência é a soma da vazão turbinada com a vazão vertida pela usina.

$$yb_{tk} = \sum_{f \in F} \left[\left(aflu_{fik} - \sum_{m \in M_f} aflu_{mt} \right) \rho_f H_f \right], \quad (3.9)$$

em que:

yb_{tk} Energia fio d'água bruta no mês t e ano k (MWmês);

F Conjunto de usinas fio a d'água do REE;

M_f Conjunto de reservatórios imediatamente a montante da usina f ;

m Índice de reservatórios imediatamente a montante da usina fio d'água f , $m \in M_f$;

$aflu_{mtk}$ Afluência natural ao reservatório m no mês t e ano k (m^3/s).

A energia fio d'água é calculada de forma muito parecida com (3.9). Entretanto, deve-se multiplicar o produto da produtibilidade e da queda líquida da usina pelo menor valor entre as diferenças de afluências, conforme a equação (3.9), e o limite de turbinamento máximo da usina subtraído da defluência mínima dos reservatórios a montante. Assim:

$$yf_{tk} = \sum_{f \in F} \left[\min \left\{ \left(Q_f^{\max} - \sum_{m \in M_f} Q_m^{\min} \right), \left(aflu_{fik} - \sum_{m \in M_f} aflu_{mtk} \right) \right\} \rho_f H_f \right], \quad (3.10)$$

em que:

yf_{tk} Energia fio d'água no mês t e ano k (MWmês);

Q_f^{\max} Turbinamento máximo da usina f (m^3/s);

Q_m^{\min} Defluência mínima do reservatório m (m^3/s).

O valor da defluência mínima é fornecido na Base de Dados, sendo definida com base em restrições da bacia hidrográfica ou no histórico de operação da usina. Por sua vez, o turbinamento máximo é dado pelo equacionamento a seguir:

$$Q_f^{\max} = \frac{(1 - IF_f)(1 - IP_f) \sum_{c=1}^{Nconj_f} (Nmaq_{fc} P_{fc})}{\rho_f H_f}, \quad (3.11)$$

em que:

$Nconj_f$ Número de conjuntos de máquinas da usina f ;

c Índice de conjunto de máquinas c , $c = 1, \dots, Nconj_f$;

IF_f Indisponibilidade forçada da usina f ;

IP_f Indisponibilidade programada da usina f ;

$Nmaq_{fc}$ Número de máquinas da usina f do conjunto c ;

P_{fc} Potência por máquina da usina f do conjunto c (MW).

3.1.2.4 Perdas de Energia Fio D'Água por Limitação de Turbinamento

Conforme apresentado no item anterior, a limitação de turbinamento das usinas a fio d'água pode provocar uma redução na energia fio d'água. Essa redução depende das aflúências a cada usina a fio d'água e aos reservatórios a montante, dado que diferentes combinações de aflúências provocam diferentes perdas e, também, devido a capacidade de turbinamento máximo. Isto pode ser observado em (3.10), pois nota-se que como a diferença entre os turbinamentos máximos e mínimos são constantes, a combinação entre as aflúências é quem vai definir qual será a energia fio d'água.

Portanto, ao invés de definir um valor fixo de perdas por causa da limitação, utilizam-se as informações de aflúência do histórico para determinar uma curva de perdas. Para cada mês t e ano k do histórico, pode-se obter a perda devido à limitação de turbinamento através da seguinte relação:

$$yp_{tk} = yb_{tk} - yf_{tk}, \quad (3.12)$$

em que:

yp_{tk} Perdas devido à limitação de turbinamento no mês t e ano k (MWmês).

Com isso, ajusta-se uma parábola por mínimos quadrados considerando os pares $(yb_{tk}; yp_{tk})$, calculados pelo histórico. A energia fio d'água bruta é utilizada como referência, visto que ela é usada para construir o histórico de energia aflúente ao ser somada à energia controlável e, conseqüentemente, é o valor obtido das séries sintéticas, conforme apresentado na próxima seção. A relação entre yp e yb é dada por:

$$yp = by_2 yb^2 + by_1 yb + by_0, \quad (3.13)$$

em que:

by_p Coeficientes da parábola tais que $p = 0, 1$ e 2 .

Segundo (CEPEL, 2001), a aproximação dos pontos por uma parábola será aceita somente quando a mesma for convexa, ou seja, o coeficiente by_2 for positivo; caso contrário, deve-se ajustar uma reta por mínimos quadrados. Além disso, devem-se determinar dois pontos importantes da parábola ou da reta:

- yb^{\min} – É o ponto a partir do qual a perda é nula; assim, se a energia fio d'água bruta for menor do que yb^{\min} não há perdas. Para o caso da parábola, este valor é definido como a maior raiz positiva ou, quando não há raiz real, o ponto de mínimo. No caso da reta, ele é calculado pela intersecção da

reta e do eixo de y_b . Destaca-se que y_b^{\min} deve ser sempre maior ou igual a zero;

- y_b^{\max} – É o ponto a partir do qual a diferença entre a energia fio d'água bruta e y_b^{\max} se transformará totalmente em perdas, podendo-se representar as perdas por (3.16), abaixo. Para o caso da reta, este valor tende ao infinito, pois a inclinação da reta é sempre a mesma e deve ser sempre menor que 1¹⁶. No caso da parábola, y_b^{\max} corresponde ao valor da energia fio d'água bruta quando a derivada de (3.13) em relação à y_b é igual a 1:

$$\frac{dyp}{dy_b} = 2 \cdot by_2 y_b^{\max} + by_1 = 1, \quad (3.14)$$

$$y_b^{\max} = \frac{1 - by_1}{2by_2}, \quad (3.15)$$

Dessa forma, quando y_b for maior do y_b^{\max} a perda de energia fio d'água devido à limitação de turbinamento é dada por:

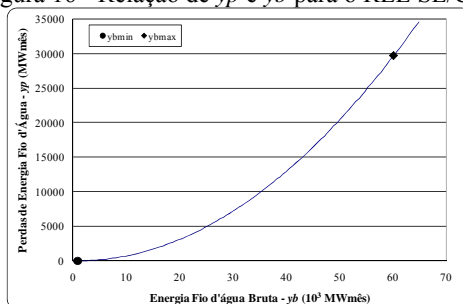
$$yp = \left[by_2 (y_b^{\max})^2 + by_1 y_b^{\max} + by_0 \right] + (y_b - y_b^{\max}), \quad (3.16)$$

em que:

y_b^{\max} Ponto limite das perdas (MWmês);

A Figura 16 apresenta a parábola das perdas de energia fio d'água para o Reservatório Equivalente de Energia do Subsistema SE/CO (Sudeste/Centro-oeste).

Figura 16 - Relação de yp e y_b para o REE SE/CO.



É importante destacar que atualmente o modelo computacional NEWAVE utiliza um procedimento diferente para construir a função que define a relação entre yp e y_b . Nesse caso, utiliza-se uma

¹⁶ A inclinação da reta será sempre menor que 1, visto que, caso contrário, as perdas seriam maiores do que a energia fio d'água bruta.

aproximação linear por partes com três retas, conforme discutido em (CEPEL, 2010).

3.1.3 Separação da Energia Controlável da Energia Afluente

A geração das séries sintéticas é feita com base no histórico de energia afluyente. Dessa forma, precisa-se separar a energia afluyente em energia controlável e fio d'água bruta, que são utilizadas na modelagem do problema em estudo. Para tanto, utiliza-se as informações do histórico para determinar a contribuição da energia controlável na energia afluyente, supondo a seguinte relação:

$$yc_{tk} = ay_{tk}, \quad (3.17)$$

em que:

a Coeficiente angular que relaciona yc e y ;

y_{tk} Energia afluyente no mês t e ano k (MWMês).

O coeficiente a é calculado por mínimos quadrados, ou seja, minimizando-se soma dos desvios quadráticos entre os pontos e a reta (3.17). Assim,

$$DESVIO = \sum_{k=1}^A \sum_{t=1}^{12} d_{tk}^2 = \sum_{k=1}^A \sum_{t=1}^{12} (yc_{tk} - ay_{tk})^2, \quad (3.18)$$

em que:

$DESVIO$ Soma dos desvios quadráticos;

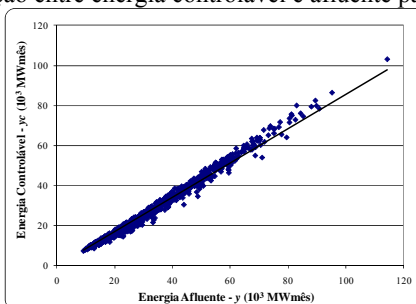
Como se busca minimizar o desvio (erro quadrático), a derivada do desvio em relação ao coeficiente angular deve ser nula. Com isso, obtém-se que:

$$\frac{\partial DESVIO}{\partial a} = -2 \sum_{k=1}^A \sum_{t=1}^{12} [y_t (yc_t - a \cdot y_t)] = 0, \quad (3.19)$$

$$a = \frac{\sum_{k=1}^A \sum_{t=1}^{12} y_t yc_t}{\sum_{k=1}^A \sum_{t=1}^{12} y_t^2}. \quad (3.20)$$

A Figura 17 ilustra o resultado obtido para o REE SE/CO, na qual se pode observar que é bastante razoável aproximar a relação entre a energia controlável e afluyente por uma reta.

Figura 17 - Relação entre energia controlável e afluyente para o REE SE/CO.



Por fim, tem-se que a energia fio d'água bruta é obtida pela subtração da energia afluyente pela controlável. A equação (3.21) é utilizada para obter y_b a partir da energia afluyente (y_t) gerada pelo modelo $ARP(p)$, enquanto que usa-se (3.9) para calcular y_b a partir do histórico de afluições naturais.

$$y_b = y_t - y_c = y_t - a y_t = (1 - a) y_t. \quad (3.21)$$

3.1.4 Energia de Vazão Mínima

A energia de vazão mínima é a quantidade de energia gerada pela descarga mínima obrigatória dos reservatórios. A energia de vazão mínima é valorada considerando que a energia é gerada pelo reservatório em análise e as usinas fio d'água a jusante até o próximo reservatório, exclusive. Abaixo tem-se o valor da energia de vazão mínima considerando que a usina em análise está com a queda líquida máxima.

$$q^{\min \max} = \sum_{i \in R} \left[Q_i^{\min} \left(\rho_i H_i^{\max} + \sum_{f \in F_i} (\rho_f H_f) \right) \right], \quad (3.22)$$

em que:

$q^{\min \max}$ Energia de vazão mínima considerando queda líquida máxima (MWmês).

Observa-se pela Equação (3.22) que a energia de vazão mínima depende diretamente da queda e, portanto, da mesma forma que o fator de correção da energia controlável, deve-se definir uma parábola para ajustar os valores de acordo com o armazenamento. No caso da energia controlável definiu-se um fator de correção; no entanto, neste caso a parábola é construída diretamente com base na energia de vazão mínima. Para isso, calculam-se valores de energia de vazão mínima máxima, média e mínima em função das quedas líquidas com os

volumes máximo, equivalente e mínimo de cada reservatório, respectivamente. Com isso, ajusta-se uma parábola por mínimos quadrados nos pontos $(v^{\max}, q^{\min \max})$, $(v^{eq}, q^{\min \text{ med}})$ e $(0; q^{\min \min})$, obtendo:

$$q^{\min} = bq_2 v^2 + bq_1 v + bq_0, \quad (3.23)$$

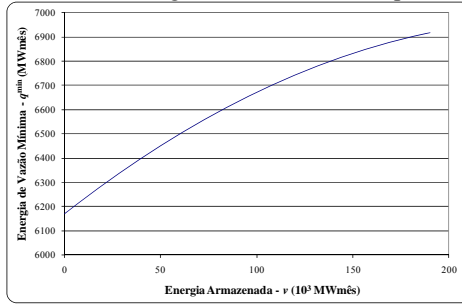
em que:

q^{\min} Energia de vazão mínima (MWmês);

bq_p Coeficientes da parábola para $p = 0, 1$ e 2 .

A Figura 18 ilustra a parábola calculada para o REE do Subsistema Elétrico SE/CO.

Figura 18 - Parábola da Energia de Vazão Mínima para o REE SE/CO.



3.1.5 Energia Evaporada

As usinas hidrelétricas utilizam reservatórios para aumentar a capacidade de regularização e de produção de energia, visto que o reservatório permite aumentar a altura de queda líquida e, consequentemente, elevar o potencial hidráulico da usina. Contudo, uma parcela da água armazenada nos reservatórios é perdida por meio da evaporação, reduzindo a energia armazenada no REE. A energia evaporada é calculada para cada mês do ano, uma vez que o coeficiente de evaporação pode mudar significativamente, de mês para mês.

A energia evaporada é determinada considerando que todas as usinas a jusante do reservatório, inclusive, poderiam utilizar a água evaporada para gerar energia. Assim, a energia evaporada máxima é obtida pelo seguinte equacionamento:

$$ev_t^{\max} = \frac{1}{2630} \sum_{i \in R} \left(e_{it} A_i^{\max} \sum_{j \in J_i} (\rho_j H_j^{\max}) \right), \quad (3.24)$$

em que:

- ev_t^{\max} Energia evaporada máxima no mês t (MWmês)¹⁷;
 e_{it} Coeficiente de evaporação do reservatório i no mês t (mm/mês);
 A_i^{\max} Área do reservatório i para o volume máximo (km²).

A quantidade de água evaporada depende da área do reservatório e, assim como a queda líquida, a área depende do volume de água armazenado. Portanto, pode-se calcular uma energia evaporada máxima, média e mínima, relativa ao armazenamento máximo, equivalente e mínimo, respectivamente. Dessa forma, como no caso da energia de vazão mínima, ajusta-se uma parábola aos três pontos (v_t^{\max} , ev_t^{\max}), (v_t^{eq} , ev_t^{med}) e (0; ev_t^{\min}), obtendo:

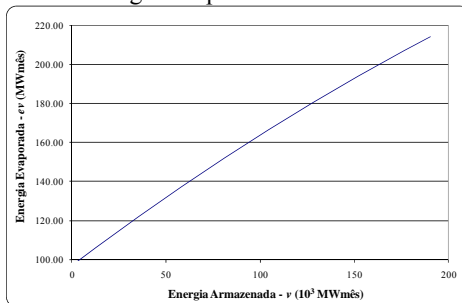
$$ev_t = bev_{2t}v^2 + bev_{1t}v + bev_{0t}, \quad (3.25)$$

em que:

- ev_t Energia evaporada no mês t (MWmês);
 bev_{pt} Coeficientes da parábola no mês t , tais que $p = 0, 1$ e 2 .

É importante ressaltar que o coeficiente de evaporação do reservatório pode assumir valores negativos. Isso ocorre quando há mais água chegando ao reservatório por canais subterrâneos do que evaporando. A Figura 19 apresenta a parábola do REE SE/CO para o mês de Janeiro.

Figura 19 - Parábola da Energia Evaporada no mês de Janeiro do REE SE/CO.



3.1.6 Geração Hidráulica Máxima

A geração hidráulica máxima é a capacidade de geração do REE, sendo calculada em função da potência e disponibilidade das máquinas de cada usina. O equacionamento proposto em (CEPEL, 2001) tem um

¹⁷ O fator 2630 é necessário para ajustar a unidade de volume evaporado (10^{-3} hm³) com a unidade de produtividade específica (MWmês/m³/s/m), neste caso considera-se que um mês tem 30,43 dias.

termo relativo ao tipo de turbina e depende da queda do reservatório. Assim, como nos casos anteriores, ajusta-se uma parábola de maneira a obter a geração hidráulica máxima em função do armazenamento do REE. Calcula-se, então, a geração hidráulica máxima em função das quedas líquidas para os volumes máximo, equivalente e mínimo e ajusta-se uma parábola aos três pontos: $(v^{\max}, gh^{\max \max})$, $(v^{eq}, gh^{\max \text{ med}})$ e $(0; gh^{\max \min})$.

A geração hidráulica máxima média é dada por:

$$gh^{\max \text{ med}} = \sum_{i \in (R+F)} \left[\frac{(1 - IF_i)(1 - IP_i)}{\sum_{c=1}^{N_{conj_i}} \left(Nm_{ic} P_{ic} \min \left(1, \left(\frac{H_i^{eq}}{Hm_{ic}} \right)^{turb_i} \right) \right) \right], \quad (3.26)$$

em que:

$gh^{\max \text{ med}}$ Geração hidráulica máxima para queda média (MWmês);

Hm_{ic} Queda nominal de cada máquina do conjunto c da usina i (m);

$turb_i$ 1,5 se a turbina é Francis ou Pelton e 1,2 se é Kaplan (CEPEL, 2001).

Ressalta-se que para as usinas fio d'água as quedas para os armazenamentos máximos, médios e mínimos são exatamente iguais à queda líquida. A geração hidráulica máxima é dada por:

$$gh^{\max} = bgh_2 v^2 + bgh_1 v + bgh_0, \quad (3.27)$$

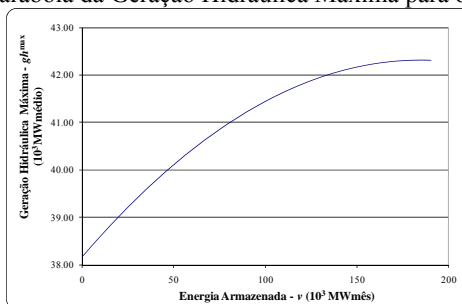
em que:

gh^{\max} Geração hidráulica máxima;

bgh_p Coeficientes da parábola para $p = 0, 1$ e 2 .

A Figura 20 ilustra a parábola calculada para o REE do Subsistema Elétrico SE/CO.

Figura 20 - Parábola da Geração Hidráulica Máxima para o REE SE/CO.



3.1.7 Geração de Pequenas Usinas

As usinas de pequeno porte como, por exemplo, as Pequenas Centrais Hidrelétricas – PCHs, não são consideradas no cálculo dos atributos dos REEs. As energias geradas por essas usinas são informadas pelo usuário para cada mês do horizonte de estudo e são abatidas da demanda.

3.1.8 Energia Armazenável Máxima por Volume de Espera

O volume de espera limita o armazenamento, não permitindo manter o reservatório completamente cheio, de maneira a amortecer períodos de elevada afluência. Isto ocorre porque em algumas usinas há épocas em que as afluências são muito elevadas e podem causar danos a jusante se não houver um amortecimento dessas afluências, devido ao elevado volume de água que seria turbinado e vertido se o reservatório estivesse completamente cheio. Com isso, torna-se necessário manter parte do reservatório disponível para amortecer as afluências elevadas por questão de segurança.

A energia armazenável máxima por volume de espera é a quantidade de energia que pode ser gerada ao deplecionar os reservatórios paralelamente, porém considerando que o armazenamento máximo é definido pelo volume de espera. A formulação para o cálculo da energia armazenável máxima por volume de espera é dada por:

$$v_{\max_op} = \frac{1}{2,63} \sum_{i \in R} \left[(VE_i^{\max} - V_i^{\min}) \sum_{j \in J_i} (\rho_j H_j^{med_ve}) \right], \quad (3.28)$$

em que:

v^{\max}_{op}	Energia armazenável máxima por volume de espera (MWmês);
VE^{\max}_i	Volume máximo do reservatório i devido ao volume de espera (hm^3);
V^{\min}_i	Volume mínimo do reservatório i (hm^3);
$H^{med_ve}_j$	Queda líquida média de volume de espera ¹⁸ das usinas com reservatórios e das usinas a fio d'água (m).

3.1.9 Energia Armazenável Mínima por Limites Operativos

A energia armazenável mínima por limites de operação é a quantidade mínima de energia que deve ser mantida armazenada no REE, uma vez que algumas usinas têm uma restrição de manter um nível de armazenamento acima do valor mínimo. Essa energia é obtida considerando que os reservatórios estão nesses limites operativos e são deplecionados paralelamente até o volume mínimo, utiliza-se uma formulação similar a utilizada em (3.28):

$$v^{\min} = \frac{1}{2,63} \sum_{i \in R} \left[(VO_i^{\min} - V_i^{\min}) \sum_{j \in J_i} (\rho_j H_j^{med_vm}) \right], \quad (3.29)$$

em que:

v^{\min}	Energia armazenável mínima por limites operativos (MWmês);
VO_i^{\min}	Volume mínimo do reservatório i devido a limites operativos (hm^3);
$H^{med_vm}_j$	Queda líquida média de volume mínimo ¹⁹ das usinas com reservatórios e das usinas a fio d'água (m).

3.1.10 Energia de Volume Morto

O volume morto de uma usina é igual ao volume mínimo e a Energia de Volume Morto refere-se à energia que poderia ser gerada pela água necessária para o enchimento do volume mínimo da usina

¹⁸ A queda bruta média de volume de espera é a diferença entre o valor médio da altura de montante do reservatório, que é obtida ao integrar o polinômio de cota de montante do volume mínimo ao volume máximo devido ao volume de espera, e a altura do canal de fuga médio. Assim, tem-se que a queda líquida média é obtida ao subtrair as perdas hidráulicas da queda bruta.

¹⁹ A queda bruta média de volume mínimo é a diferença entre o valor médio da altura de montante do reservatório, que é obtida ao integrar o polinômio de cota de montante do volume mínimo ao volume mínimo devido a limites operativos, e a altura do canal de fuga médio. Com isso, a queda líquida média é obtida ao subtrair as perdas hidráulicas da queda bruta.

após a construção da mesma. Essa energia pode ser calculada como sendo a quantidade de água para preencher o volume mínimo multiplicada pelas produtibilidades das usinas a jusante que usariam essa água para produzir energia. Em geral, o enchimento do volume morto requer um período de tempo e, portanto, o valor deve ser distribuído igualmente durante o tempo de enchimento. Além disso, considera-se a possibilidade de que parte do volume morto já foi preenchido no momento do estudo. Assim, tem-se:

$$vm = \frac{1}{2,63} \sum_{i \in R_n} \left[\frac{(V_i^{\min} - V_i^{ench}) \sum_{j \in J_i} (\rho_j H_j^{med})}{nm} \right], \quad (3.30)$$

em que:

- vm Energia de volume morto (MWmês);
- V_i^{ench} Volume da usina i que já foi enchido (hm³);
- nm Número de meses para o fim do enchimento.

É importante destacar que a Energia de Volume Morto é definida para cada estágio. Dessa forma, utiliza-se o valor calculado por (3.30) nos nm estágios a partir do estágio inicial de enchimento. Sobretudo ressalta-se que, como as máquinas da usina ainda não estão operando, a produtividade da mesma deve ser considerada nula mesmo após o enchimento completo do volume morto.

3.1.11 Energia de Usinas Submotorizadas

Após a construção das usinas e o enchimento do volume morto, inicia-se o comissionamento das máquinas da usina. Enquanto o número de máquinas base, definido no conjunto de dados, não for comissionado, a produtividade da usina é considerada nula. Dessa forma, a usina pode ser considerada como uma geração que é abatida da carga, como no caso da geração de pequenas usinas. No nosso modelo utilizou-se um fator de 90% da capacidade comissionada, isto é, a energia de usinas submotorizadas é soma da potência de todas as máquinas instaladas em usinas que ainda não atingiram o número de máquinas base multiplicada por 0,9.

Neste ponto é importante destacar que a entrada de usinas a fio d'água de grande porte no SIN, em que há uma variação muito grande na afluência pode gerar algumas dificuldades. Isto porque se o número de máquinas base for muito próximo do número total de máquinas, em períodos de baixa afluência as máquinas comissionadas podem não estar

gerando 90% da capacidade. Por outro lado se o número de máquinas base for pequeno, em períodos de elevada afluência pode não ser possível transformar toda a afluência em energia de acordo com a produtibilidade da usina. Dessa forma, é necessário verificar se número de máquinas base é adequada, em caso negativo a dificuldade pode ser contornada ao ajustar a produtibilidade durante um determinado período ou adicionar a demanda um valor para compensar possíveis excessos de geração.

3.1.12 Energia de Desvio

A energia de desvio refere-se à água desviada ou retirada imediatamente a montante de uma UHE, que poderia ser transformada em energia pela UHE e pelas usinas a jusante. Esta água pode ser considerada como uma retirada da afluência às usinas e, por isso, pode ser definida como Controlável e Fio D'água. Destaca-se que os desvios são obtidos independentemente das afluências.

3.1.12.1 Energia de Desvio Controlável

A Energia de Desvio Controlável é a energia que poderia ser gerada pela água desviada ou retirada imediatamente a montante das usinas com reservatório ou que pode ser controlada. Portanto, deve-se considerar a retirada/desvio dos reservatórios que será valorada para todas as usinas a jusante do reservatório, inclusive. Além disso, a energia retirada/desviada das usinas a fio d'água deve ser considerada também, uma vez que afeta a disponibilidade de água nas usinas com reservatório a jusante. Assim, essa quantidade de água é valorada considerando o primeiro reservatório a jusante da usina fio d'água e as usinas a fio d'água que estão a jusante do reservatório. Matematicamente, pode ser obtida da seguinte maneira:

$$qc_t = \sum_{i \in R} \left[q_{it}^{desv} \sum_{j \in J_i} (\rho_j H_j) \right] + \sum_{f \in F} \left[q_{ft}^{desv} \sum_{n \in N_f} (\rho_n H_n^{med}) \right], \quad (3.31)$$

em que:

qc_t Energia de Desvio Controlável no mês t (MWmês);

q_{it}^{desv} Vazão desviada ou/e retirada do reservatório i no mês t (m^3/s);

q_{ft}^{desv} Vazão desviada ou/e retirada da usina fio d'água f no mês t (m^3/s);

N_f Conjunto de usinas a jusante do primeiro reservatório a jusante da usina f , considerando o reservatório também;

n Índice de usinas, $n \in N_f$.

É importante ressaltar que quando o desvio for referente à retirada de água a montante o valor de q^{desv} será menor que zero, sendo que pode haver entrada de água a montante das usinas e, nesse caso, q^{desv} é positivo.

3.1.12.2 Energia de Desvio Fio d'água

Neste caso, consideram-se apenas as retiradas ou desvio de água a montante das usinas fio d'água, que são valoradas somente pelo conjunto de usinas fio d'água a jusante, inclusive, até o primeiro reservatório. Assim,

$$qf_t = \sum_{f \in F} \left[q_{ft}^{desv} \sum_{j \in F_f} (\rho_j H_j) \right], \quad (3.32)$$

em que:

qf_t Energia de Desvio Fio d'Água no mês t (MWmês).

3.1.13 Configuração Hidrelétrica

Cada vez que uma usina que compõe um REE tem seu processo de construção finalizado, enche o volume morto ou instala uma nova máquina, os atributos do REE se alteram. Dessa forma, a cada mudança precisa-se definir uma nova configuração hidrelétrica, isto é, um novo conjunto de REEs que representará as UHEs a partir daquele determinado estágio do horizonte em estudo.

Considere que uma usina hidrelétrica pode assumir um dos três estados:

- **Enchendo o volume morto:** isto ocorre logo após a usina ter sido concluída e não permite qualquer geração de energia nesta usina. Neste caso, o reservatório não está disponível e o rendimento do conjunto turbina-gerador é considerado nulo;
- **Reservatório em operação sem todas as máquinas:** o reservatório já está disponível para operação, mas apenas parte das máquinas está em funcionamento. Assim, o rendimento do conjunto turbina-gerador é nulo, mas o reservatório pode ser utilizado;

- **Reservatório em operação com todas as máquinas:** a usina está operando em regime nominal e, portanto, o rendimento do conjunto turbina-gerador é ajustado para o valor nominal.

Assim, define-se uma nova configuração hidrelétrica sempre que ocorrer uma mudança em uma usina do REE de (a) para (b) ou (b) para (c). Além disso, deve-se definir uma nova configuração hidrelétrica sempre que houver alteração na capacidade de geração²⁰ que altera de maneira significativa os atributos do REE. Portanto, o estudo é formado por conjuntos de REEs referente às configurações hidrelétricas, visto que ao longo do horizonte de estudo diversas usinas podem ter sua condição alterada.

Para cada configuração devem ser calculados todos os atributos apresentados nesta seção, bem como será necessário calcular um modelo AutoRegressivo para geração das séries sintéticas. Destaca-se que no PEN as configurações são definidas apenas para o horizonte em estudo. No horizonte de pós-estudo²¹ utiliza-se a última configuração do estudo como referência.

3.1.13.1 Correção da Energia Armazenada

Conforme comentado anteriormente, quando uma usina entra em operação tem-se uma nova configuração hidrelétrica. Dessa forma, sempre que há uma mudança de configuração deve-se corrigir o valor da energia armazenada no início do estágio em que a mudança ocorre. Isto acontece porque embora os volumes dos reservatórios permaneçam os mesmos, a produtividade de algumas usinas pode ser diferente e, com isso, a energia gerada pelo mesmo volume também. É importante ressaltar que apenas as mudanças de capacidade de geração (produtividade e canal de fuga) alteram a energia armazenada. A entrada de novos reservatórios não altera a energia armazenada.

Considerando que a energia armazenada de um estágio t , antes de ocorrer uma mudança de configuração, a Energia Armazenada é dada por:

²⁰ Por exemplo, ao alterar o canal de fuga médio de uma usina modificam-se as quedas máxima, média, mínima e equivalente da usina e, consequentemente, os atributos do REE relativo ao Subsistema em questão devem ser calculados novamente.

²¹ O horizonte de pós-estudo é um conjunto de estágios que são utilizados após o horizonte de interesse para evitar a influência do esvaziamento dos reservatórios nos últimos estágios de decisões.

$$v_t = \frac{1}{2,63} \sum_{i \in R} \left[V_{it} \sum_{j \in J_i} (\rho_j H_j^{med}) \right], \quad (3.33)$$

em que:

V_{it} Volume útil armazenado do reservatório i no estágio t (hm^3).

Considerando a operação em paralelo, pode-se definir um fator de proporcionalidade entre os reservatórios, λ , dado por:

$$V_{it} = \lambda_t V u_i. \quad (3.34)$$

Então, substituindo (3.34) em (3.33) e, considerando (3.1), tem-se:

$$v_t = \lambda_t v_t^{\max}, \quad (3.35)$$

Assim,

$$\lambda_t = \frac{v_t}{v_t^{\max}}. \quad (3.36)$$

Suponha que são agregadas novas usinas ao sistema existente, de forma que K_i é o novo conjunto de usinas a jusante do reservatório i , inclusive. Conforme comentado, não há alteração nos volumes armazenados nos reservatórios, assim assume-se que as novas usinas estão com o volume mínimo armazenado. Portanto, a energia armazenada no estágio $t+1$, v_{t+1} , é dada por:

$$v_{t+1} = \frac{1}{2,63} \sum_{i \in R} \left[V_{it} \sum_{j \in K_i} (\rho_j H_j^{med}) \right], \quad (3.37)$$

$$v_{t+1} = \lambda_t \frac{1}{2,63} \sum_{i \in R} \left[V u_i \sum_{j \in K_i} (\rho_j H_j^{med}) \right], \quad (3.38)$$

Substituindo (3.36) em (3.38), tem-se que:

$$v_{t+1} = \frac{v_t}{v_t^{\max}} \frac{1}{2,63} \sum_{i \in R} \left[V u_i \sum_{j \in K_i} (\rho_j H_j^{med}) \right]. \quad (3.39)$$

Assim, o fator de correção da energia armazenada ($f v_{t+1}$) é dado por:

$$v_{t+1} = f v_{t+1} v_t, \quad (3.40)$$

$$f v_{t+1} = \frac{1}{v_t^{\max}} \frac{1}{2,63} \sum_{i \in R} \left[V u_i \sum_{j \in K_i} (\rho_j H_j^{med}) \right], \quad (3.41)$$

Outra maneira de calcular o fv_{t+1} é desenvolver o equacionamento em relação à energia armazenável máxima após a mudança, que é dada por:

$$v_{t+1}^{\max} = \frac{1}{2,63} \sum_{i \in NR} \left[Vu_i \sum_{j \in K_i} (\rho_j H_j^{\text{med}}) \right], \quad (3.42)$$

em que:

v_{t+1}^{\max} Energia armazenável máxima da configuração do estágio $t+1$ (MWmês);

NR Conjunto de reservatórios da configuração do estágio $t+1$.

Assim, pode-se reescrever (3.39) como:

$$v_{t+1} = \frac{v_t}{v_t^{\max}} \left\{ \frac{1}{2,63} \sum_{i \in NR} \left[Vu_i \sum_{j \in K_i} (\rho_j H_j^{\text{med}}) \right] - \frac{1}{2,63} \sum_{i \in (NR-R)} \left[Vu_i \sum_{j \in K_i} (\rho_j H_j^{\text{med}}) \right] \right\}, \quad (3.43)$$

$$v_{t+1} = \frac{v_t}{v_t^{\max}} \left\{ v_{t+1}^{\max} - \frac{1}{2,63} \sum_{i \in (NR-R)} \left[Vu_i \sum_{j \in K_i} (\rho_j H_j^{\text{med}}) \right] \right\}, \quad (3.44)$$

$$v_{t+1} = v_t \left\{ \frac{v_{t+1}^{\max}}{v_t^{\max}} - \frac{1}{v_t^{\max}} \frac{1}{2,63} \sum_{i \in (NR-R)} \left[Vu_i \sum_{j \in K_i} (\rho_j H_j^{\text{med}}) \right] \right\}. \quad (3.45)$$

Portanto,

$$fv_{t+1} = \frac{v_{t+1}^{\max}}{v_t^{\max}} - \frac{1}{v_t^{\max}} \frac{1}{2,63} \sum_{i \in (NR-R)} \left[Vu_i \sum_{j \in K_i} (\rho_j H_j^{\text{med}}) \right]. \quad (3.46)$$

A primeira formulação para calcular o fv_{t+1} em (3.41) foi utilizada para ilustrar o cálculo da correção de energia armazenada. No entanto, optou-se por usar a Equação (3.46) para o algoritmo implementado neste trabalho. Não há qualquer diferença entre as duas formulações e, portanto, a decisão foi tomada com base na facilidade de implementação computacional.

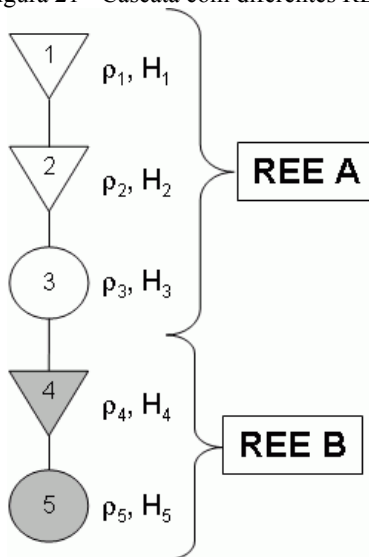
3.1.14 Cascatas com diferentes REEs

Os diferentes atributos que compõem o modelo a REE são valorados considerando a usina em análise e as usinas a jusante. Contudo, uma cascata pode conter usinas pertencentes a distintos REEs. Por exemplo, ao definir REEs por Subsistema Elétrico, tem-se que na

bacia do rio São Francisco há usinas pertencentes ao subsistema SE/CO e NE (Nordeste) e, portanto, a energia produzida por essa cascata deve ser dividida adequadamente entre dois REEs.

Existem duas maneiras de tratar esse problema: adicionar usinas fictícias ou considerar os diferentes REEs no cálculo. Para ilustrar estas metodologias, considere o caso exemplo presente na Figura 21, o qual apresenta uma cascata composta por dois REEs (A e B).

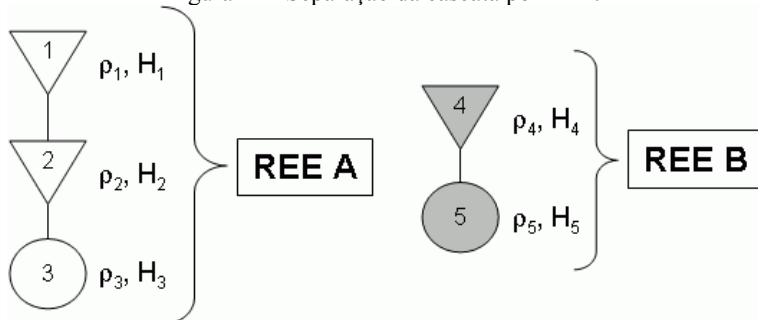
Figura 21 - Cascata com diferentes REEs



3.1.14.1 Uso de usinas hidrelétricas fictícias

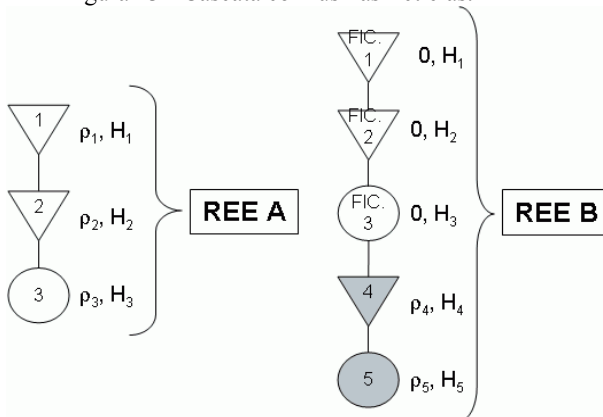
Uma metodologia consiste em considerar que se tem diversas cascatas e que cada uma é composta apenas por usinas do mesmo reservatório equivalente de energia. Considerando o exemplo proposto na Figura 21 separa-se a cascata em duas, uma para o REE A e outra para o REE B, conforme ilustrado na Figura 22.

Figura 22 - Separação da cascata por REE.



Apesar de a metodologia apresentada até aqui ser suficiente para modelar adequadamente a primeira parcela da cascata, referente ao REE A, o mesmo não acontece para o REE B, uma vez que a água nos reservatórios das usinas a montante (REE A) também gera energia nos REEs a jusante (REE B). Dessa maneira, esta metodologia propõe que se dupliquem todas as usinas a montante do REE B, porém considerando que essas usinas não possuem máquinas, ou seja, a produtividade específica é nula. Com isso, a água dos reservatórios a montante produzirá energia apenas nas usinas do REE em análise. A Figura 23 apresenta as cascatas finais que são utilizadas no cálculo dos atributos dos reservatórios equivalentes de energia. Esta formulação é utilizada no modelo NEWAVE.

Figura 23 - Cascata com usinas fictícias.



3.1.14.2 Considerar os diferentes REEs no cálculo

Neste caso não é preciso separar a cascata em diferentes cascatas, porém separam-se os somatórios do produto produtibilidades e quedas por REE. Considerando como exemplo o cálculo da Energia Armazenável Máxima (3.1), caso todas as usinas da cascata fizessem parte do mesmo reservatório equivalente de energia (A-B), o equacionamento é dado por:

$$v^{\max A-B} = \frac{1}{2,63} \left\{ \begin{aligned} & \left[Vu_1 \sum_{j=1}^5 (\rho_j H_j^{med}) \right] + \left[Vu_2 \sum_{j=2}^5 (\rho_j H_j^{med}) \right] \\ & + \left[Vu_4 \sum_{j=4}^5 (\rho_j H_j^{med}) \right] \end{aligned} \right\}, \quad (3.47)$$

em que:

$v^{\max A-B}$ Energia armazenável máxima considerando apenas um REE (MWmês);

Vu_1 Volume útil do reservatório 1 (hm³);

Vu_2 Volume útil do reservatório 2 (hm³);

Vu_4 Volume útil do reservatório 4 (hm³).

Entretanto, no caso em que a cascata é composta por dois REEs diferentes, A e B, a Energia Armazenável Máxima de cada REE pode ser escrita matematicamente pela relação a seguir, para o caso exemplo.

$$v^{\max A} = \frac{1}{2,63} \left\{ \left[Vu_1 \sum_{j=1}^3 (\rho_j H_j^{med}) \right] + \left[Vu_2 \sum_{j=2}^3 (\rho_j H_j^{med}) \right] \right\}, \quad (3.48)$$

$$v^{\max B} = \frac{1}{2,63} \left\{ \begin{aligned} & \left[Vu_1 \sum_{j=4}^5 (\rho_j H_j^{med}) \right] + \left[Vu_2 \sum_{j=4}^5 (\rho_j H_j^{med}) \right] \\ & + \left[Vu_4 \sum_{j=4}^5 (\rho_j H_j^{med}) \right] \end{aligned} \right\}, \quad (3.49)$$

em que:

$v^{\max A}$ Energia armazenável máxima do REE A (MWmês);

$v^{\max B}$ Energia armazenável máxima do REE B (MWmês).

Portanto, não é necessário criar usinas fictícias quando o cálculo é feito já considerando que as usinas pertencem a diferentes REEs. Esta foi a metodologia implementada neste trabalho, visto que o equacionamento também é adequado quando opta-se por utilizar usinas fictícias. Assim, cabe ao usuário definir se as usinas serão duplicadas.

3.2 MODELO PARA GERAÇÃO DA ÁRVORE DE CENÁRIOS

Uma das etapas mais importantes na modelagem de um problema estocástico consiste em definir a estratégia para gerar as afluências que serão utilizadas nos estudos para obtenção da política de operação do sistema. O modelo estocástico utilizado no Brasil é o modelo AutoRegressivo Periódico de ordem p (ARP(p)) que, de acordo com (NOAKES *et al.*, 1985), é o mais adequado para fazer previsão mensais de afluência. Esta seção apresentará em detalhes a modelagem do modelo ARP(p) que é utilizada no caso Brasileiro.

Apesar de ser um modelo multivariado em que se tem um número de componentes igual ao número de REE, esta seção apresentará a modelagem para o caso univariado. Assim, os equacionamentos e procedimentos discutidos na sequência devem ser feitos para cada componente (cada REE) e por simplicidade o índice r que define o REE será omitido dos parâmetros. Considere, então, o modelo ARP(p) dado por:

$$\begin{aligned} \left(\frac{y_{m+12 \cdot (j-1)} - \mu_m}{\sigma_m} \right) = & \phi_{m1} \left(\frac{y_{m+12 \cdot (j-1)-1} - \mu_{m-1}}{\sigma_{m-1}} \right) + \dots \\ & + \phi_{mPm} \left(\frac{y_{m+12 \cdot (j-1)-Pm} - \mu_{m-Pm}}{\sigma_{m-Pm}} \right) + \kappa_{m+12 \cdot (j-1)}^N, \end{aligned} \quad (3.50)$$

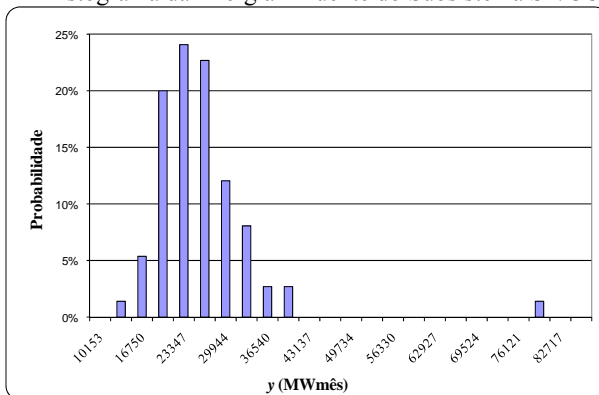
em que:

- $y_{m+12(j-1)}$ realização de afluência do processo estocástico no mês m do ano j ;
- μ_m média do mês m ;
- σ_m desvio padrão do mês m ;
- ϕ_{mPm} coeficiente do modelo AutoRegressivo de ordem p_m do mês m ;
- $\kappa_{m+12(j-1)}^N$ resíduos independentes com distribuição Normal no mês m do ano j .

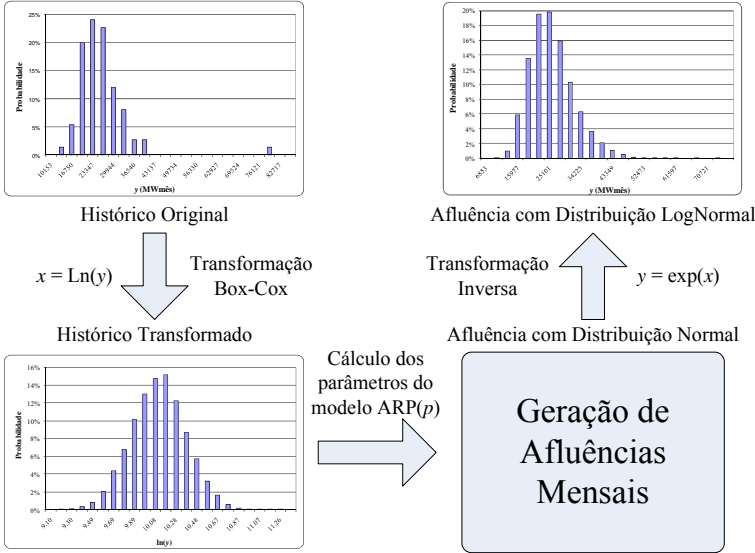
Conforme pode ser observado em (3.50), o modelo ARP(p) usa informações de p meses anteriores e um resíduo para gerar a afluência no mês em estudo. De acordo com (HIPEL e MCLEOD, 1994), este modelo foi desenvolvido para modelar séries temporais em que os resíduos são independentes e seguem uma função densidade de probabilidade com média zero e variância σ_R^2 , sendo que em alguns casos é importante considerar que os resíduos seguem uma distribuição Normal - $N(0, \sigma_R^2)$. No caso do PEN, a consideração de que os resíduos seguem uma Normal não é válida, uma vez que com um resíduo Normal

o modelo $ARP(p)$ não consegue reproduzir a FDP do histórico de Energias Afluentes, que em geral é bem representada por uma distribuição LogNormal. A Figura 24 ilustra o histograma da energia afluyente do mês de Junho no Subsistema SE/CO (Sudeste/Centro-oeste), no qual se pode confirmar uma distribuição diferente da distribuição Normal.

Figura 24 - Histograma da Energia Afluyente do Subsistema SE/CO (Junho).



Nesses casos, uma estratégia bastante comum e que foi usada por (NOAKES *et al.*, 1985), consiste em fazer uma transformação Box-Cox no histórico de Energias Afluentes (HIPEL e MCLEOD, 1994) para forçá-lo a seguir uma distribuição Normal. No caso do PEN, por ser considerado que o histórico tem distribuição LogNormal, toma-se o logaritmo natural do histórico. Com esse histórico transformado é que se calcula o modelo $ARP(p)$ para fazer a geração das afluentes. Assim, para obter o valor real da Energia Afluyente torna-se necessário fazer a transformação inversa, que nesse caso, de maneira simplificada, seria tomar a exponencial do valor gerado pelo modelo $ARP(p)$. A Figura 25 ilustra um diagrama com as etapas mencionadas acima de forma a facilitar a compreensão.

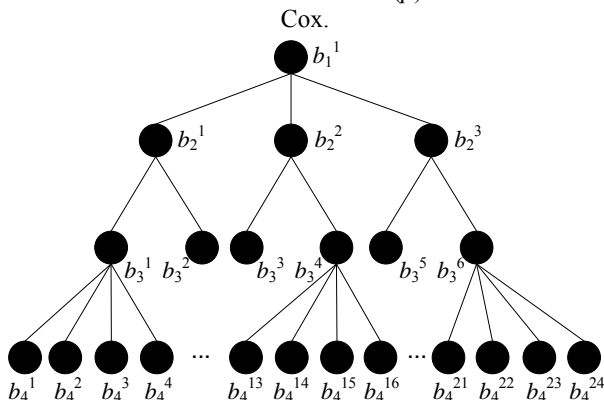
Figura 25 - Modelo ARP(p) com a Transformação Box-Cox.

No entanto, como discutido no Capítulo 2, para a PDDE poder compartilhar os cortes de Benders, é desejável que a árvore de cenários tenha amostras comuns. Este não é o caso desse modelo ARP(p), visto que a Energia Afluente depende das realizações dos nós anteriores. Considere a seguinte formulação multiestágio:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & c_1^T x_1 + \sum_{t=2}^T \sum_{\omega_t=1}^N p_t^{\omega_t} c_t^T x_t^{\omega_t} \\
 \text{s.a:} \quad & A_1 x_1 = b_1 \\
 & B_t x_{t-1}^{\omega_{t-1}} + A_t x_t^{\omega_t} = b_t^{\omega_t}, \quad \omega_t = 1, \dots, N; t = 2, \dots, T.
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Assumindo que se tem um modelo ARP(1), o vetor $b_t^{\omega_t}$ dependerá do nó antecessor, i.e., $b_{t-1}^{a(\omega_t)}$. Assim, torna-se muito difícil garantir que os conjuntos $\{b_4^1, b_4^2, b_4^3, b_4^4\}$, $\{b_4^{13}, b_4^{14}, b_4^{15}, b_4^{16}\}$ e $\{b_4^{21}, b_4^{22}, b_4^{23}, b_4^{24}\}$, apresentados na Figura 26, serão exatamente iguais, uma vez que eles dependem de b_3^1 , b_3^4 e b_3^6 , respectivamente, e que podem ser diferentes entre si.

Figura 26 - Árvore de cenários do modelo ARP(p) com a transformação Box-Cox.



Uma maneira de garantir que a árvore tenha amostras comuns é considerar que a Energia Afluente é uma variável de estado na PDDE e, assim, construir a árvore de cenários com os resíduos que são utilizados pelo modelo ARP(p). Nesse caso, mantendo o exemplo anterior, as Energias Afluentes anteriores não compõem mais o vetor b_t^{or} , mas passam a fazer parte do vetor de decisões x_t . Apesar das Energias Afluentes anteriores não serem uma decisão tomada no estágio t , essa estratégia permite acoplar com os estágios anteriores por meio da matriz B_t e usar o resíduo para construir a árvore. Com isso, consegue-se garantir que os conjuntos $\{b_4^1, b_4^2, b_4^3, b_4^4\}$, $\{b_4^{13}, b_4^{14}, b_4^{15}, b_4^{16}\}$ e $\{b_4^{21}, b_4^{22}, b_4^{23}, b_4^{24}\}$ serão formados pelo mesmo grupo de resíduos, e.g. $\{b_4^a, b_4^b, b_4^c, b_4^d\}$, e, portanto, tem-se uma árvore de cenários com amostras comuns.

Entretanto, ao considerar a Energia Afluente como variável de estado não se pode utilizar a transformação Box-Cox, visto que ao fazer a transformação inversa para obter a Energia Afluente, a exponencial seria composta por variáveis de estado o que torna o modelo ARP(p) não linear e inviabiliza o uso da modelagem linear. Isto pode ser inferido do fato que a matriz B_t não conseguiria representar o modelo ARP(1) corretamente. Além disso, não se garante a convexidade do problema e, consequentemente, a PDDE pode produzir resultados indesejáveis.

Com o intuito de contornar as dificuldades apresentadas acima, neste trabalho, conforme discutido brevemente em (PEREIRA e PINTO, 1991), manteve-se as Energias Afluentes como variáveis de estado e aplicou-se o modelo ARP(p) diretamente ao histórico de Energias Afluentes, sem a transformação Box-Cox. Entretanto, tem-se como

resultado que o resíduo associado com esta estratégia ao ser aplicado para gerar outras séries sintéticas não conduz a resultados coerentes, com o histórico de Energias Afluentes, por exemplo, geram-se energias afluentes negativas, assim, são necessários alguns ajustes no resíduo.

Nesse sentido, conforme proposto por (CEPEL, 2001) e implementado no modelo computacional, substituiu-se o resíduo $\kappa_{m+12(j-1)}^N$ pelo $\kappa_{m+12(j-1)}$ que é apresentado na Equação (3.52) abaixo. Neste caso, adotou-se uma distribuição LogNormal com três parâmetros para o resíduo (3.52), em que a variável ξ_r é um ruído branco gaussiano $[N(0,1)]$.

$$\kappa_{m+12(j-1)} = e^{(\xi_r, \sigma_\xi + \alpha)} + \Lambda. \quad (3.52)$$

Com base em (CHARBENEAU, 1978), os parâmetros de (3.52) são dados por:

$$\theta = 1 + \frac{\sigma_{mR}^2}{(\mu_{mR} - \Lambda)^2}, \quad (3.53)$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{\ln(\theta)}, \quad (3.54)$$

$$\alpha = \ln \left(\frac{\sigma_{mR}}{\sqrt{\theta(\theta-1)}} \right). \quad (3.55)$$

Em que:

σ_{mR}^2 Variância do resíduo do mês m obtida pelo modelo;

μ_{mR} Média do resíduo do mês m obtida pelo modelo.

Além de reproduzir os momentos estatísticos do histórico, é necessário garantir, por meio de ajustes nos parâmetros de (3.52), que o modelo ARP(p) não gere valores de Energias Afluentes negativos. Uma estratégia para garantir isso consiste em definir um valor adequado para o parâmetro Λ como sendo:

$$\Lambda = -\frac{\mu_m}{\sigma_m} - \left[\begin{aligned} &\phi_{m1} \left(\frac{y_{m+12(j-1)-1} - \mu_{m-1}}{\sigma_{m-1}} \right) + \dots \\ &+ \phi_{mPm} \left(\frac{y_{m+12(j-1)-Pm} - \mu_{m-Pm}}{\sigma_{m-Pm}} \right) \end{aligned} \right], \quad (3.56)$$

Dessa forma, o modelo ARP(p) (3.50) é agora substituído por:

$$\begin{aligned} \left(\frac{y_{m+12 \cdot (j-1)} - \mu_m}{\sigma_m} \right) &= \phi_{m1} \left(\frac{y_{m+12 \cdot (j-1)-1} - \mu_{m-1}}{\sigma_{m-1}} \right) + \dots \\ &+ \phi_{mPm} \left(\frac{y_{m+12 \cdot (j-1)-Pm} - \mu_{m-Pm}}{\sigma_{m-Pm}} \right) + \kappa_{m+12 \cdot (j-1)}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

Na sequência desta seção serão apresentadas as etapas de identificação da ordem p e estimação dos parâmetros do modelo ARP(p). Além disso, será apresentado como pode ser considerada a correlação espacial existente entre as Energias Afluentes dos REEs. E, por fim, será detalhado como é feita geração da série sintética.

3.2.1 Identificação da ordem

A primeira etapa para obter o modelo ARP(p) é definir a ordem p do modelo a ser utilizado no estudo. A ordem define a quantidade de coeficientes AutoRegressivos do modelo ARP(p) e, portanto, determina quantos meses anteriores ao mês em questão serão usados para calcular uma possível realização da variável $y_{m+12(j-1)}$. Por exemplo, se no mês de Junho a ordem do modelo é 3, então são utilizadas as energias afluentes dos meses de Março, Abril e Maio.

De acordo com (NOAKES *et al.*, 1985), a melhor metodologia para determinar a ordem de um modelo ARP(p) aplicado à série de aflúncias mensais é o uso da Função de Auto-Correlação (FAC) e da Função de Auto-Correlação Parcial (FACP). A auto-correlação de um mês m em relação a k meses anteriores, $\rho_m(k)$, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\rho_m(k) = E \left[\left(\frac{y_{m+12 \cdot (j-1)} - \mu_m}{\sigma_m} \right) \left(\frac{y_{m+12 \cdot (j-1)-k} - \mu_{m-k}}{\sigma_{m-k}} \right) \right], \quad (3.58)$$

em que:

$\rho_m(k)$ auto-correlação do mês m em relação ao mês $(m-k)$;

$E[\cdot]$ valor esperado.

Ao multiplicar ambos os lados de (3.57) por $\left(\frac{y_{m+12 \cdot (j-1)-k} - \mu_{m-k}}{\sigma_{m-k}} \right)$

e calcular o valor esperado para a expressão resultante, temos:

$$\begin{aligned}
E \left[\left(\frac{y_{m+12 \cdot (j-1)} - \mu_m}{\sigma_m} \right) \left(\frac{y_{m+12 \cdot (j-1)-k} - \mu_{m-k}}{\sigma_{m-k}} \right) \right] = \\
\phi_{m1} E \left[\left(\frac{y_{m+12 \cdot (j-1)-1} - \mu_{m-1}}{\sigma_{m-1}} \right) \left(\frac{y_{m+12 \cdot (j-1)-k} - \mu_{m-k}}{\sigma_{m-k}} \right) \right] + \dots \\
+ \phi_{mP_m} E \left[\left(\frac{y_{m+12 \cdot (j-1)-P_m} - \mu_{m-P_m}}{\sigma_{m-P_m}} \right) \left(\frac{y_{m+12 \cdot (j-1)-k} - \mu_{m-k}}{\sigma_{m-k}} \right) \right] \\
+ E \left[\kappa_{m+12 \cdot (j-1)} \left(\frac{y_{m+12 \cdot (j-1)-k} - \mu_{m-k}}{\sigma_{m-k}} \right) \right].
\end{aligned} \tag{3.59}$$

De acordo com (HIPEL e MCLEOD, 1994), para $k > 0$ o último termo da expressão acima é nulo, uma vez que o resíduo $\kappa_{m+12(j-1)}$ é independente do termo $y_{m+12(j-1)-k}$. Dessa forma, obtém-se que a FAC é dada por:

$$\begin{aligned}
\rho_m(k) = \phi_{m1} \rho_{m-k}(1-k) + \dots + \phi_{ml} \rho_{m-k}(l-k) + \\
\dots + \phi_{mP_m} \rho_{m-k}(p_m - k).
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Ao analisar (3.59) pode-se inferir uma propriedade importante:

$$\rho_{m-k}(l-k) = \rho_{m-l}(k-l). \tag{3.61}$$

Assim, define-se um sistema linear que relaciona os coeficientes do modelo AutoRegressivo (ϕ_{ml}) e as auto-correlações ($\rho_m(l-k)$), sendo que com este sistema obtém-se a matriz de Yule-Walker. Observe que a propriedade (3.61) já foi aplicada.

$$\begin{pmatrix}
1 & \rho_{m-1}(1) & \rho_{m-1}(2) & \dots & \rho_{m-1}(p_m-1) \\
\rho_{m-1}(1) & 1 & \rho_{m-2}(1) & \dots & \rho_{m-2}(p_m-2) \\
\rho_{m-1}(2) & \rho_{m-2}(1) & 1 & \dots & \rho_{m-3}(p_m-3) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\rho_{m-1}(p_m-1) & \rho_{m-2}(p_m-2) & \rho_{m-3}(p_m-3) & \dots & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\phi_{m1} \\
\phi_{m2} \\
\phi_{m3} \\
\vdots \\
\phi_{mP_m}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\rho_m(1) \\
\rho_m(2) \\
\rho_m(3) \\
\vdots \\
\rho_m(p_m)
\end{pmatrix}. \tag{3.62}$$

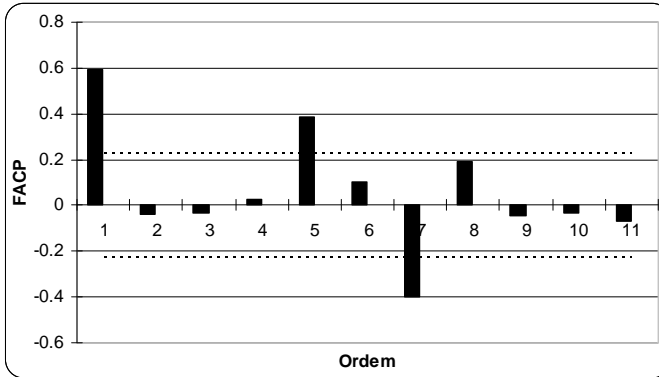
Como os valores de auto-correlação apresentados na matriz acima são calculados a partir do histórico, o interesse nesse caso é definir a ordem do modelo $ARP(p)$, ou seja, definir p_m . Para tanto, utiliza-se a FACP, que é construída resolvendo o sistema composto pela matriz de Yule-Walker considerando que a ordem do modelo varia de 1 até a ordem máxima, que no caso do PEN pela regulamentação a ordem máxima é 6 (seis) mas poderia chegar até 11 (onze), armazenando o valor do coeficiente de maior ordem. Matematicamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_{m-1}(1) & \rho_{m-1}(2) & \dots & \rho_{m-1}(k-1) \\ \rho_{m-1}(1) & 1 & \rho_{m-2}(1) & \dots & \rho_{m-2}(k-2) \\ \rho_{m-1}(2) & \rho_{m-2}(1) & 1 & \dots & \rho_{m-2}(k-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{m-1}(k-1) & \rho_{m-2}(k-2) & \rho_{m-3}(k-3) & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{mk1} \\ \phi_{mk2} \\ \phi_{mk3} \\ \vdots \\ \phi_{mkk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_m(1) \\ \rho_m(2) \\ \rho_m(3) \\ \vdots \\ \rho_m(k) \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

A FACP é dada pelo conjunto de (ϕ_{mkk}) , em que $k = 1, 2, \dots, 11$. Então, para o caso em estudo, são resolvidos 11 sistemas lineares (3.63) e armazenados os valores referentes a cada ordem k . Hipel e McLeod (1994) demonstram que em um processo AutoRegressivo de ordem p_m , a função de auto-correlação parcial ϕ_{mkk} será diferente de zero, para k menor ou igual a p_m e zero para k maior que p_m .

Todavia, como os valores de ϕ_{mkk} nunca são nulos, mas bastante próximos de zero, torna-se necessário definir um critério de escolha para determinar quais valores são significativos. Segundo (HIPEL e MCLEOD, 1994), os coeficientes da FACP são normalmente distribuídos com média zero e variância igual a $(1/n)$, $N(0, 1/n)$, em que n é a quantidade de amostras. Dessa forma, considerando um intervalo de confiança de 95%, i.e., $(\pm 1.96\sqrt{1/n})$, pode-se definir que a ordem do modelo $ARP(p)$ será dada pelo último coeficiente da FACP a ficar fora do intervalo de confiança. A Figura 27 ilustra um exemplo em que a ordem do modelo a ser escolhida é 7.

Figura 27 - Coeficientes da FACP e Intervalo de Confiança.



É importante ressaltar que se deve determinar a ordem do modelo $ARP(p)$ para cada mês. Além disso, em (STENDIGER, 2001) propõe-se uma abordagem alternativa, na qual a ordem do modelo é determinada pela ordem p em que todos os ϕ_{mkk} para $k < p$ estão fora dos limites definidos anteriormente. Assim, no caso do exemplo anterior, a ordem do modelo $ARP(p)$ seria 1 (um).

3.2.2 Estimação dos parâmetros

Após definir a ordem do modelo $ARP(p)$, a próxima etapa consiste em estimar os coeficientes do modelo (ϕ_{mk}), bem como a variância e média do resíduo que serão utilizadas na correção do ruído branco. Agora que já se conhece a ordem do modelo para cada mês (p_m), calculam-se os coeficientes AutoRegressivos, utilizando o sistema linear formado pela matriz de Yule-Walker (3.62).

Para determinar a variância e média do resíduo deve-se calcular um histórico dos resíduos com base no modelo $ARP(p)$ definido pela matriz de Yule-Walker (3.62). Assim, tem-se que o resíduo (κ_{mj}) para um determinado mês (m) e ano (j) do histórico é dado por:

$$\begin{aligned} \kappa_{mj} = & \left(\frac{y_{mj} - \mu_m}{\sigma_m} \right) - \phi_{m1} \left(\frac{y_{m-1,j} - \mu_{m-1}}{\sigma_{m-1}} \right) - \dots \\ & - \phi_{m p_m} \left(\frac{y_{m-p_m,j} - \mu_{m-p_m}}{\sigma_{m-p_m}} \right), \end{aligned} \quad (3.64)$$

em que:

y_{mj} energia afluyente do mês m no ano j .

Após calcular o histórico de resíduos é possível calcular o valor médio e a variância para cada mês, conforme discutido no início desta seção, estes valores serão utilizados em (3.53) e (3.55) para ajustar aos resíduos a distribuição LogNormal a três parâmetros que será utilizada para gerar os cenários das séries sintéticas.

Neste ponto é importante destacar que, de acordo com (MACEIRA e DAMÁZIO, 2004), dependendo dos valores dos coeficientes autorregressivos o modelo pode causar consequências indesejáveis na política operativa obtida pela Programação Dinâmica Dual Estocástica, sendo necessário recalculá-la a ordem e os coeficientes do modelo quando este for o caso. Isto ocorre porque, conforme os autores, eventualmente, pode haver coeficientes negativos que causariam coeficientes positivos nos cortes de Benders, que não estariam de acordo com o esperado, isto é, quanto maior for a energia afluyente maior seria o custo de operação futuro. Entretanto, deve-se considerar que pode haver uma correlação negativa entre os meses do ano, sendo que o período úmido em um estágio pode significar uma tendência de período seco em estágios futuros e os cortes devem ser capazes de considerar essas ocorrências.

3.2.3 Correlação Espacial

Até este ponto o modelo discutido foi univariado, sendo que se definem as ordens e se estimam os parâmetros para cada componente. Entretanto, além da correlação temporal definida pelo modelo $ARP(p)$, deve-se considerar, também, a correlação espacial entre as energias afluentes aos diferentes reservatórios equivalentes de energia do sistema. Isto ocorre porque as usinas hidrelétricas que estão próximas geograficamente tendem a apresentar um comportamento hidrológico semelhante, da mesma maneira isto pode acontecer com os REEs utilizados no estudo. Por exemplo, ao considerar REEs por subsistema elétrico, pode-se definir uma correlação espacial entre os Subsistemas S e SE/CO. Assim, a partir dessa seção será considerado o modelo multivariado.

Como a aleatoriedade do modelo $ARP(p)$ depende apenas do resíduo, faz-se uma modificação no ruído que será utilizado para a geração das séries sintéticas de maneira a considerar a correlação espacial no problema do PEN. Dessa forma, o ruído espacialmente correlacionado (W_t) é dado por:

$$W_t = D\xi_t, \quad (3.65)$$

em que,

W_t Vetor de ruído branco com correlação espacial;

D Matriz de Carga.

A matriz D , que é conhecida como Matriz de Carga, pode ser determinada ao pós-multiplicar (3.65) pelo transposto de W_t e calcular o valor esperado. Assim, temos que:

$$E[W_t W_t^T] = DE[\xi_t \xi_t^T]D^T. \quad (3.66)$$

Como os ruídos ξ_t são normalmente distribuídos (média zero e variância unitária) e independentes, tem-se que o resultado de $E[\xi_t \xi_t^T]$ é a matriz identidade. Desta forma,

$$E[W_t W_t^T] = DD^T. \quad (3.67)$$

Como W_t é uma matriz de resíduos que considera a correlação cruzada dos REEs, obtém-se que $E[W_t W_t^T] = U$. Desta forma, tem-se que a Matriz de Carga (D) é dada por:

$$DD^T = U, \quad (3.68)$$

em que:

U Matriz de correlações espaciais.

A matriz U é uma estimativa das correlações espaciais dos REEs, ou seja, o elemento u_{in} refere-se à correlação espacial de ordem zero entre os reservatórios i e n . Assim,

$$U = \begin{bmatrix} \rho_{1,1} & \rho_{1,2} & \cdots & \rho_{1,NR} \\ \rho_{2,1} & \rho_{2,2} & \cdots & \rho_{2,NR} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{NR,1} & \rho_{NR,2} & \cdots & \rho_{NR,NR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \cdots & \rho_{1,NR} \\ \rho_{2,1} & 1 & \cdots & \rho_{2,NR} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{NR,1} & \rho_{NR,2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.69)$$

em que:

$\rho_{i,n}$ Correlação espacial entre os REEs i e n ;

NR Número de Reservatórios Equivalentes de Energia.

Considerando que a correlação entre os ruídos é uma estimativa da correlação entre os resíduos dos REEs, temos que os elementos da matriz U são dados por:

$$\rho_{i,n} = \frac{\frac{1}{A} \sum_{j=1}^A [(\kappa_{ji} - \mu_{Ri})(\kappa_{jn} - \mu_{Rn})]}{\sigma_{Ri} \sigma_{Rn}}, \quad (3.70)$$

em que:

κ_{ji} resíduo do REE i no ano j ;

μ_{Ri} média do resíduo do REE i ;

σ_{Ri} desvio padrão do resíduo do REE i .

Para calcular a Matriz de Carga (D) considera-se que a mesma é uma matriz triangular inferior. Assim, pode-se obter facilmente a relação entre os elementos matriz D e da matriz de correlação espacial U .

Ao considerar a correlação cruzada, o modelo que era univariado, no qual cada ruído é espacialmente independente, torna-se multivariado, em que o ruído de um REE influencia nos demais. É importante ressaltar que os ruídos continuam independentes entre estágios.

3.2.4 Geração das Séries Sintéticas

Nesta seção será apresentada a formulação para fazer a geração de séries sintéticas de energia afluyente, segundo a modelagem multivariada, que considera a correlação espacial. Destaca-se que o vetor de ruídos²² $\xi_r^{(m)}$ será sorteado, considerando uma distribuição Normal de média zero e variância um, $N(0,1)$, e correlação espacial será introduzida considerando a Matriz de Carga (3.65). Assim, temos que:

$$\begin{bmatrix} w_{mt,1} \\ w_{mt,2} \\ \vdots \\ w_{mt,NR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ d_{2,1} & d_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{NR,1} & d_{NR,2} & \cdots & d_{NR,NR} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_{mt,1} \\ \xi_{mt,2} \\ \vdots \\ \xi_{mt,NR} \end{bmatrix}. \quad (3.71)$$

O equacionamento para obter as séries sintéticas é dado por (3.57). Dessa forma, a energia afluyente de um reservatório de energia equivalente r de um mês m no ano j é dada por:

$$y_{m+12 \cdot (j-1),r} = \mu_{mr} + \sigma_{mr} \left[\begin{aligned} &\phi_{m1,r} \left(\frac{y_{m+12 \cdot (j-1)-1,r} - \mu_{m-1,r}}{\sigma_{m-1,r}} \right) + \dots \\ &+ \phi_{Pm,r}^{(m)} \left(\frac{y_{m+12 \cdot (j-1)-Pm,r} - \mu_{m-Pm,r}}{\sigma_{m-Pm,r}} \right) \\ &+ e^{(w_{mtr} \sigma_{\xi_r} + \alpha_r)} + \Lambda_r \end{aligned} \right]. \quad (3.72)$$

Em que, t de w_{mtr} representa o estágio em estudo que tem relação direta com o mês m e ano j .

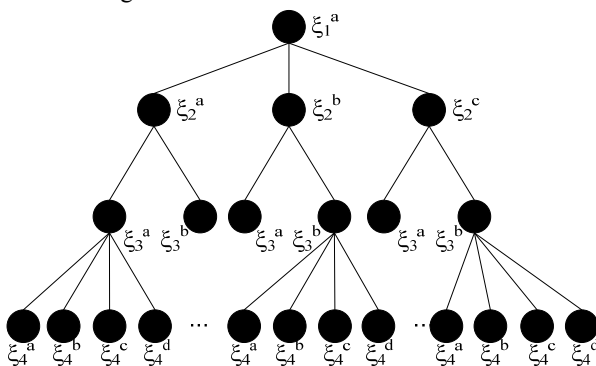
²² O vetor de ruídos é composto pelos ruídos de cada um dos REEs, $\xi_{t,r}^{(m)}$, que compõe o sistema, sendo que o sorteio de cada um dos ruídos é independente dos demais em t , i e m .

Com isso, pode-se calcular a série periódica sintética de energias afluentes. Como no PEN a representação das incertezas é feita por meio de uma Árvore de Cenários, conforme discutido anteriormente, a seguir discute-se como gerar a árvore e não apenas um conjunto de séries sintéticas independentes.

3.2.5 Geração da Árvore de Cenários

No estudo do PEN deseja-se construir a árvore de cenários com o modelo $ARP(p)$ e, como comentado no início desta seção, devido à importância do compartilhamento de cortes por parte da PDDE, a árvore de cenários é construída com amostras comuns. Para tanto, quando se usa o modelo $ARP(p)$ deve-se considerar que as Energias Afluentes anteriores são variáveis de estado e a árvore é construída com os ruídos brancos, distribuição $N(0,1)$. Assim, a Figura 28 apresenta uma árvore para quatro estágios.

Figura 28 - Árvore de cenários do PEN.



Na árvore ilustrada acima, são sorteados 4 conjuntos de ruídos brancos, um para cada estágio, $\{\xi_1^a\}$, $\{\xi_2^a, \xi_2^b, \xi_2^c\}$, $\{\xi_3^a, \xi_3^b\}$ e $\{\xi_4^a, \xi_4^b, \xi_4^c, \xi_4^d\}$. Nesse caso, a observação ξ_4^c gera uma Energia Afluente de acordo com os nós antecessores, ou seja, o cenário a que a realização pertence. Dessa forma, o cálculo da Energia Afluente continua sendo feito conforme a formulação apresentada na Subseção 3.2.4 (equações (3.71) e (3.72)), sendo que nesse caso utiliza-se o ruído que compõe o nó.

3.3 FORMULAÇÃO DO PEN

Nesta seção será apresentada a formulação do PEN que também é utilizada pelo modelo implementado neste trabalho. Inicialmente, mostraremos a formulação para um problema mais simples e, então, serão adicionadas as seguintes características do PEN:

- Patamares de carga;
- Modelo ARP(p).

Conforme foi discutido no capítulo anterior, na PDDE o problema é decomposto em nós. Assim, a formulação do problema para o nó do cenário ω_t no estágio t , que está associado a um ruído desse estágio e a história de ruídos até chegar ao estágio t , isto é, aos ruídos anteriores que fazem parte do mesmo cenário, é dada por:

$$z_t = \text{Min} \sum_{j=1}^{NUT} (ct_j gt_{jt}) + \sum_{k=1}^{NS} \left(\sum_{h=1}^{NDEF} cd_{kh} d_{kht} \right) + \frac{1}{(1+\beta)} \alpha_{t+1}$$

s.a:

Restrições de Balanço Energético

$$v_{r,t+1} + gh_{rt} + s_{rt} = fv_{rt} v_{rt} + fc_{rt} y_{c_{rt}}^{\omega_t} - q_{rt}^{\min} - ev_{rt} - vm_{rt} + qc_{rt} \\ r = 1, \dots, NR,$$

Restrições de Atendimento a Demanda

$$\sum_{r \in NR_k} gh_{rt} + \sum_{j \in NUT_k} gt_{jt} + \sum_{s \in I_k} (f_{skt} - f_{kst}) + \sum_{h=1}^{NDEF} d_{kht} + ex_{kt} = L_{kt} \\ - \sum_{r \in NR_k} (q_{rt}^{\min} + yf_{rt}^{\omega_t} + qf_{rt} + es_{rt} + gp_{rt}), \quad k = 1, \dots, NS;$$

(3.73)

Restrições dos Limites das Variáveis

$$gt_{jt}^{\min} \leq gt_{jt} \leq gt_{jt}^{\max}, \quad j = 1, \dots, NUT, \\ 0 \leq d_{kht} \leq d_{kht}^{\max}, \quad k = 1, \dots, NS; h = 1, \dots, NDEF, \\ 0 \leq f_{skt} \leq f_{skt}^{\max}, \quad k = 1, \dots, NS; s = 1, \dots, NS, \\ 0 \leq f_{kst} \leq f_{kst}^{\max}, \quad k = 1, \dots, NS; s = 1, \dots, NS, \\ 0 \leq fv_{r,t+1} v_{r,t+1} \leq v_{r,t+1}^{\max_op}, \quad r = 1, \dots, NR, \\ 0 \leq gh_{rt} \leq gh_{rt}^{\max} - yf_{rt}^{\omega_t} - qf_{rt} - q_{rt}^{\min}, \quad r = 1, \dots, NR,$$

Função de Custo Futuro

$$\alpha_{t+1} - \sum_{r=1}^{NR} (\pi_{rc, v_{r,t+1}} v_{r,t+1}) \geq \delta_{c,t+1}, \quad c = 1, \dots, NC,$$

em que:

NUT	Total de usinas termelétricas no sistema;
j	Índice de usinas termelétricas;
c_{tj}	Custo incremental de geração da termelétrica j (R\$/MWmês);
g_{tj}	Geração da termelétrica j no estágio t (MWmês);
NS	Total de subsistemas no sistema;
k, s	Índices de subsistemas;
$NDEF$	Total de patamares de déficit;
h	Índices de patamares de déficit;
cd_{kh}	Custo do déficit de energia do subsistema k no patamar de déficit h (R\$/MWmês);
d_{kht}	Déficit de energia do SSE k no patamar de déficit h e estágio t (MWmês);
β	Taxa de desconto;
α_{t+1}	Custo futuro esperado do estágio $t+1$ até T (R\$);
NUT_k	Conjunto de usinas termelétrica pertencentes ao subsistema k ;
Γ_k	Conjunto de subsistemas que tem intercâmbio com o subsistema k ;
f_{skt}	Intercâmbio do subsistema s para k no estágio t (MWmês);
f_{kst}	Intercâmbio do subsistema k para s no estágio t (MWmês);
ex_{kt}	Excesso de energia ²³ no subsistema k no estágio t (MWmês);
L_{kt}	Demanda de energia do subsistema k no estágio t (MWmês);
NC	Total de Cortes de Benders adicionados até a iteração atual;
c	Índice dos Cortes de Benders;
NR	Total de REEs;
r	Índice de REEs;
$v_{r,t+1}$	Energia armazenada do REE r ao final no estágio t (MWmês);
s_{rt}	Energia vertida do REE r no estágio t (MWmês);
gh_{rt}	Energia gerada pelo REE r no estágio t (MWmês);

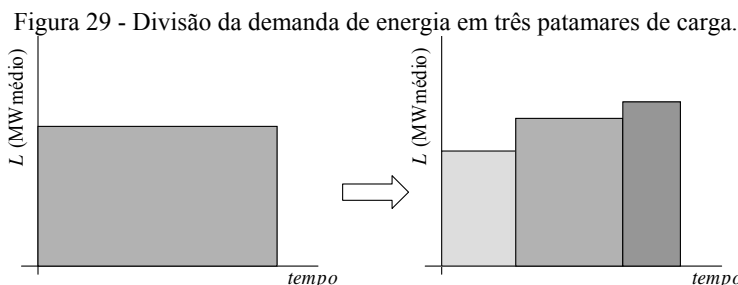
²³ A variável de Excesso de Energia é necessária, pois podem haver casos em que a soma da geração térmica mínima, energia fio d'água, energia de vazão mínima e energia de usinas submotorizadas é maior que a demanda. Nesse caso, o LP seria inviável se não houvesse a variável de Excesso de Energia.

fv_{rt}	Fator de correção da energia armazenada do REE r no estágio t ;
v_{rt}	Energia armazenada inicial do REE r no estágio t (MWmês);
fc_{rt}	Fator de correção da energia controlável do REE r no estágio t ;
$yc_{rt}^{\omega_t}$	Energia controlável do REE r no estágio t do cenário ω_t (MWmês);
qc_{rt}	Energia controlável desviada a montante do REE r no estágio t (MWmês);
q_{rt}^{\min}	Energia de vazão mínima do REE r no estágio t (MWmês);
ev_{rt}	Energia evaporada do REE r no estágio t (MWmês);
vm_{rt}	Energia de enchimento de volume morto do REE r no estágio t (MWmês);
NR_k	Conjunto de REEs pertencentes ao subsistema k ;
$yf_{rt}^{\omega_t}$	Energia fio d'água do REE r no estágio t do cenário ω_t (MWmês);
qf_{rt}	Energia fio d'água desviada a montando do REE r no estágio t (MWmês);
es_{rt}	Energia de usinas submotorizadas do REE r no estágio t (MWmês);
gp_{rt}	Geração de pequenas usinas do REE r no estágio t (MWmês);
gt_{jt}^{\min}	Geração mínima da termelétrica j no estágio t (MWmês);
gt_{jt}^{\max}	Geração máxima da termelétrica j no estágio t (MWmês);
d_{kht}^{\max}	Déficit máximo do subsistema k no patamar de déficit h e estágio t (MWmês);
f_{skt}^{\max}	Intercâmbio máximo do subsistema s para k no estágio t (MWmês);
f_{kst}^{\max}	Intercâmbio máximo do subsistema k para s no estágio t (MWmês);
$v_{r,t+1}^{\max}$	Energia armazenada máxima do REE r ao final do estágio t (MWmês);
gh_{rt}^{\max}	Geração hidráulica máxima do REE r no estágio t (MWmês);
$\pi_{rc,v,t+1}$	Coeficiente associado à v_{t+1} do REE r do corte de Benders c no estágio t (R\$/MWmês).
$\delta_{c,t+1}$	Coeficiente linear do corte c no estágio t (R\$);

Como pode ser observado na Formulação (3.73), o déficit é dividido em patamares, pois o custo associado ao corte de carga aumenta à medida que se corta mais carga. Assim, define-se *NDEF* patamares de déficit de maneira a valorar adequadamente os custos envolvidos com o corte de carga de acordo com a sua profundidade.

3.3.1 Patamares de carga

Patamar de carga é uma divisão do suprimento e, conseqüentemente, de geração de energia de acordo com alguma característica da carga. No caso do PEN divide-se a demanda em patamares de acordo com a magnitude; isto é, em períodos de maior ou menor consumo. A Figura 29 ilustra o caso em que a demanda de energia total constante é dividida em três patamares de carga.



Como pode ser observado na Figura 29 o valor máximo de cada patamar é diferente, assim como o tempo em que a demanda permanece em cada patamar. Dessa forma, pode-se calcular a demanda de energia de um subsistema k em um patamar de carga q , como segue:

$$L_{kqt} = L_{kt} FCA_{kqt} FP_{kqt}, \quad (3.74)$$

em que:

- q Índice de patamares de carga;
- FCA_{kqt} Fator de carregamento do subsistema k no patamar q e estágio t ;
- FP_{kqt} Fator de patamar do subsistema k no patamar de carga q e estágio t .

O Fator de Patamar é dado pela relação entre a duração do patamar de carga e o tempo total do estágio, por exemplo, quando o fator de patamar for igual a 0,3 significa que neste estágio em 30% do tempo a demanda está neste patamar. Por isto, a soma dos fatores de patamar deve ser sempre unitária de maneira a se ter 100% do tempo

considerado na análise. No caso do PEN consideram-se três patamares de carga: leve, média e pesada.

O Fator de Carregamento é uma relação utilizada para aumentar ou diminuir a demanda em um determinado patamar de carga, como por exemplo, na carga leve diminui-se ($FCA < 1$) e na pesada aumenta-se ($FCA > 1$). É importante ressaltar que a soma dos produtos dos fatores de patamar e carregamento deve ser unitária, visto que a soma da demanda de energia em cada patamar deve ser igual à demanda total original.

$$\sum_{q=1}^{NP} FCA_q FP_q = 1, \quad (3.75)$$

em que:

NP Quantidade de patamares de carga.

Ao aplicar os patamares de carga na formulação apresentada em (3.73) precisa-se ajustar algumas restrições. A principal modificação ocorre na restrição de atendimento a demanda, uma vez que se deve ter uma restrição para cada patamar de carga. Dessa forma, utiliza-se uma variável de geração termelétrica e hidrelétrica para cada patamar, assim como uma variável para cada intercâmbio e déficit. Com isso, as novas restrições de atendimento a demanda são dadas por:

$$\sum_{r \in NR_k} gh_{rqt} + \sum_{j \in NUT_k} gt_{jqt} + \sum_{s \in \Gamma_k} (f_{skqt} - f_{ksqt}) + \sum_{h=1}^{NDEF} d_{khqt} + ex_{kqt} = L_{kt} FCA_{kqt} FP_{kqt} - \left[\sum_{r \in NR_k} (q_{rt}^{\min} + yf_{rt}^{\omega_i} + qf_{rt} + es_{rt} + gp_{rt}) \right] FP_{kqt}, \quad (3.76)$$

$$k = 1, \dots, NS; q = 1, \dots, NP,$$

em que:

gh_{rqt} Energia gerada pelo REE r no patamar de carga q e estágio t (MWmês);
 gt_{jqt} Geração da termelétrica j no patamar de carga q e estágio t (MWmês);
 f_{skqt} Intercâmbio do subsistema s para k no patamar q e estágio t (MWmês);
 f_{ksqt} Intercâmbio do subsistema k para s no patamar q e estágio t (MWmês);
 ex_{kqt} Excesso de energia no subsistema k , patamar q e estágio t (MWmês);
 d_{khqt} Déficit de energia do subsistema k no patamar de déficit h , patamar de carga q e estágio t (MWmês).

Dessa forma, devem-se modificar as restrições dos limites das variáveis que estão em função do patamar de carga:

$$g_{jt}^{\min} FP_{kqt} \leq g_{jqt} \leq g_{jt}^{\max} FP_{kqt}, \quad j \in NUT_k; k = 1, \dots, NS; q = 1, \dots, NP, \quad (3.77)$$

$$0 \leq d_{khqt} \leq d_{kht}^{\max} FP_{kqt}, \quad k = 1, \dots, NS; h = 1, \dots, NDEF; q = 1, \dots, NP, \quad (3.78)$$

$$0 \leq f_{skqt} \leq f_{skt}^{\max} FP_{kqt}, \quad k = 1, \dots, NS; s = 1, \dots, NS; q = 1, \dots, NP, \quad (3.79)$$

$$0 \leq f_{ksqt} \leq f_{kst}^{\max} FP_{kqt}, \quad k = 1, \dots, NS; s = 1, \dots, NS; q = 1, \dots, NP, \quad (3.80)$$

$$0 \leq gh_{rqt} \leq \left[gh_{rt}^{\max} - yf_{rt}^{\omega_r} - qf_{rt} - q_{rt}^{\min} \right] FP_{kqt}, \quad r \in NR_k; k = 1, \dots, NS; q = 1, \dots, NP. \quad (3.81)$$

As restrições de balanço energético dos REEs e a função objetivo do problema também necessitam ser ajustadas, como mostrado a seguir:

$$v_{r,t+1} + s_{rt} + \sum_{q=1}^{NP} gh_{rqt} = fv_{rt}v_{rt} - ev_{rt} - q_{rt}^{\min} + fc_{rt}yc_{rt}^{\omega_r} + qc_{rt} - vm_{rt}, \quad (3.82)$$

$$r = 1, \dots, NR,$$

$$z_t = \text{Min} \sum_{j=1}^{NUT} \left(ct_j \sum_{q=1}^{NP} g_{jqt} \right) + \sum_{k=1}^{NS} \left(\sum_{h=1}^{NDEF} \left(cd_{kh} \sum_{q=1}^{NP} d_{khqt} \right) \right) + \frac{1}{1+\beta} \alpha_{t+1}. \quad (3.83)$$

3.3.2 Modelo ARP(p)

A formulação apresentada até o momento mostra a energia controlável e fio d'água diretamente nas restrições (3.76), (3.81) e (3.82); no entanto, essas energias advêm do modelo ARP(p) definido na seção anterior. Esta seção adicionará o modelo ARP(p) à formulação do problema, o qual deve ser incluído em todas as restrições que contém energia controlável ou fio d'água. Sendo assim, as restrições de balanço energético dos REEs, atendimento a demanda e limite máximo de geração hidrelétrica devem ser alteradas.

Para aplicar o modelo ARP(p) à formulação do problema devem-se definir os coeficientes do modelo AutoRegressivo periódico em função do estágio, uma vez que o modelo ARP(p) foi definido para cada mês do ano e configuração de REE. Além disso, para simplificar a formulação do ARP(p) apresentada em (3.57) fizeram-se algumas modificações no seu equacionamento como mostrado a seguir.

$$\left(\frac{y_{r,t} - \overline{y_{rm}}}{desv(y_{rm})} \right) = \phi_{rt1} \left(\frac{y_{r,t-1} - \overline{y_{r,m-1}}}{desv(y_{r,m-1})} \right) + \dots$$

$$+ \phi_{rt,Prm} \left(\frac{y_{r,t-Prm} - \overline{y_{r,m-Prm}}}{desv(y_{r,m-Prm})} \right) + \kappa_{rt}^{\omega_t}, \quad (3.84)$$

em que:

- Prm Ordem do modelo ARP do REE r no mês m ;
 $y_{r,t-p}$ Energia afluyente do REE r no estágio $(t-p)$ (MWmês);
 m Índice do mês relativo ao estágio t ;
 $\overline{y_{rm}}$ Energia afluyente média do REE r no mês m (MWmês);
 $desv(y_{rm})$ Desvio padrão da energia afluyente do REE r no mês m ;
 ϕ_{rtp} Coeficiente do modelo ARP do REE r no estágio t de ordem p ;
 $\kappa_{rt}^{\omega_t}$ Resíduo do modelo ARP do REE r para o nó do cenário ω_t no estágio t .

Manipulando (3.84) pode-se definir:

$$\phi_{rtp} = \phi_{rtp} \frac{desv(y_{rm})}{desv(y_{r,m-p})}, \quad (3.85)$$

$$\eta_{rt}^{\omega_t} = \overline{y_{rm}} - \overline{\phi_{rt1} y_{r,m-1}} - \dots - \overline{\phi_{rt,Prm} y_{r,m-Prm}} + \kappa_{rt}^{\omega_t} desv(y_{rm}), \quad (3.86)$$

em que:

- ϕ_{rtp} Coeficiente modificado do modelo ARP do REE r no estágio t de ordem p ;
 $\eta_{rt}^{\omega_t}$ Resíduo composto do modelo ARP do REE r no estágio t do cenário ω_t .

Assim, o modelo ARP(p) é dado por:

$$y_{r,t} = \phi_{rt1} y_{r,t-1} + \dots + \phi_{rt,Prm} y_{r,t-Prm} + \eta_{rt}^{\omega_t}. \quad (3.87)$$

Destaca-se que, como discutido na Seção 3.1.2, a energia fio d'água deve considerar as perdas devido à limitação de turbinamento máximo das usinas, as quais são obtidas com a curva calculada em função da energia fio d'água bruta. Dessa forma, temos que:

$$y_{rt}^{\omega_t} = y b_{rt}^{\omega_t} - y p, \quad (3.88)$$

em que:

- $y p$ Perdas devido à limitação de turbinamento máximo (MWmês);
 $y b_{rt}^{\omega_t}$ Energia fio d'água bruta do REE r para o nó do cenário ω_t no estágio t (MWmês).

Sendo que,

$$yb_{rt}^{\omega_t} = (1 - a_r) \left(\varphi_{rt1} y_{r,t-1} + \dots + \varphi_{rt,Prm} y_{r,t-Prm} + \eta_{rt}^{\omega_t} \right), \quad (3.89)$$

$$yp = by_{2r} yb_{rt}^{\omega_t 2} + by_{1r} yb_{rt}^{\omega_t} + by_{0r}, \quad (3.90)$$

em que:

a_r Coeficiente de energia controlável do REE r ;

by_{nr} Coeficientes da parábola do REE r tais que $n = 0, 1$ e 2 .

Assim, tem-se que as novas restrições de balanço energético, atendimento à demanda e limites de geração hidrelétrica são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} v_{r,t+1} + s_{rt} + \sum_{q=1}^{NP} gh_{rqt} &= f v_{rt} v_{rt} - e v_{rt} - q_{rt}^{\min} + q c_{rt} - v m_{rt} \\ &+ f c_{rt} a_r \left(\varphi_{rt1} y_{r,t-1} + \dots + \varphi_{rt,Prm} y_{r,t-Prm} + \eta_{rt}^{\omega_t} \right), \quad r = 1, \dots, NR, \end{aligned} \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned} \sum_{r \in NR_k} gh_{rqt} + \sum_{j \in NUT_k} gt_{jqt} + \sum_{s \in I_k} (f_{skqt} - f_{ksqt}) + \sum_{h=1}^{NDEF} d_{khqt} + ex_{kqt} = \\ L_{kt} FCA_{kqt} FP_{kqt} - \sum_{r \in NR_k} \left[q_{rt}^{\min} + es_{rt} - yp + qf_{rt} + gp_{rt} \right] FP_{kqt} \\ - \sum_{r \in NR_k} \left[(1 - a_r) \left(\varphi_{rt1} y_{r,t-1} + \dots + \varphi_{rt,Prm} y_{r,t-Prm} + \eta_{rt}^{\omega_t} \right) \right] FP_{kqt}, \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$k = 1, \dots, NS; q = 1, \dots, NP,$$

$$0 \leq gh_{rqt} \leq \left[\begin{aligned} &gh_{rt}^{\max} - q_{rt}^{\min} + yp - qf_{rt} \\ &- (1 - a_r) \left(\varphi_{rt1} y_{r,t-1} + \dots + \varphi_{rt,Prm} y_{r,t-Prm} + \eta_{rt}^{\omega_t} \right) \end{aligned} \right] FP_{kqt}, \quad (3.93)$$

$$r \in NR_k; k = 1, \dots, NS; q = 1, \dots, NP.$$

Além disso, quando se considera que a geração da árvore de cenários é feita com o modelo ARP(p), faz-se necessário considerar a energia afluyente como variável de estado. Dessa forma, o Corte de Benders deve ter um termo associado com essa variável de estado e, portanto, o novo equacionamento do corte é dado por:

$$\begin{aligned} \alpha_{t+1} - \sum_{r=1}^{NR} \pi_{rct,y1} y_{rt}^{\omega_t} - \dots - \sum_{r=1}^{NR} \pi_{rct,yp} y_{r,t-Prm+1}^{\omega_t} - \sum_{r=1}^{NR} \pi_{rct,v} v_{r,t+1} \geq \bar{z}_{t+1} \\ - \sum_{r=1}^{NR} \pi_{rct,v} v_{r,t+1}^{it} - \sum_{r=1}^{NR} \pi_{rct,y1} y_{rt}^{cen} - \dots - \sum_{r=1}^{NR} \pi_{rct,yp} y_{r,t-Prm+1}^{cen}, \end{aligned} \quad (3.94)$$

em que:

$\overline{\pi_{rct,yt}}$	Coefficiente associado à y_{t-l} do REE r do corte c no estágio t , $l = 1, \dots, p$ (R\$/MWhês);
$y_{r,t-Prm+1}^{of}$	Energia afluyente do REE r do cenário ω_t no estágio $(t-Prm+1)$ (MWhês);
y_{rt}^{cen}	Energia afluyente do REE r do cenário cen em que o corte foi criado no estágio t (MWhês);
$y_{r,t-Prm+1}^{cen}$	Energia afluyente do REE r do cenário cen em que o corte foi criado no estágio $(t-Prm+1)$ (MWhês);
$\overline{z_{t+1}}$	Custo total médio do conjunto de cenários sucessores, $\Delta(\omega_t)$ (R\$).

3.3.3 Formulação Completa

Por fim, apresenta-se a formulação completa para o nó do cenário ω_t no estágio t , dada por:

$$z_t = \text{Min} \sum_{j=1}^{NUT} \left(ct_j \sum_{q=1}^{NP} gt_{jqt} \right) + \sum_{k=1}^{NS} \left(\sum_{h=1}^{NDEF} \left(cd_{kh} \sum_{q=1}^{NP} d_{khqt} \right) \right) + \frac{1}{(1+\beta)} \alpha_{t+1}$$

s.a.:

Restrição de Balanço Energético dos REEs

$$\begin{aligned} v_{r,t+1} + s_{rt} + \sum_{q=1}^{NP} gh_{rqt} &= fv_{rt}v_{rt} - ev_{rt} - q_{rt}^{\min} + qc_{rt} - vm_{rt} \\ &+ fc_{rt}a_r \left(\varphi_{rt1}y_{r,t-1} + \dots + \varphi_{rt,Prm}y_{r,t-Prm} + \eta_{rt}^{\omega_t} \right), \quad r = 1, \dots, NR, \end{aligned} \quad (3.95)$$

Restrição de Atendimento a Demanda

$$\begin{aligned} \sum_{r \in NR_k} gh_{rqt} + \sum_{j \in NUT_k} gt_{jqt} + \sum_{s \in I_k} (f_{skqt} - f_{ksqt}) + \sum_{h=1}^{NDEF} d_{khqt} + ex_{kqt} &= \\ L_{kt} FCA_{kqt} FP_{kqt} - \sum_{r \in NR_k} \left[q_{rt}^{\min} + es_{rt} - yp + qf_{rt} + gp_{rt} \right] FP_{kqt} & \\ - \sum_{r \in NR_k} \left[(1 - a_r) \left(\varphi_{rt1}y_{r,t-1} + \dots + \varphi_{rt,Prm}y_{r,t-Prm} + \eta_{rt}^{\omega_t} \right) \right] FP_{kqt}, & \\ & k = 1, \dots, NS; q = 1, \dots, NP, \end{aligned}$$

Restrição de Limite de Geração Termelétrica

$$gt_{jt}^{\min} FP_{kqt} \leq gt_{jqt} \leq gt_{jt}^{\max} FP_{kqt},$$

$$j \in NUT_k; k = 1, \dots, NS; q = 1, \dots, NP,$$

Restrição de Limite de Déficit

$$0 \leq d_{kht} \leq d_{kht}^{\max} FP_{kqt},$$

$$k = 1, \dots, NS; h = 1, \dots, NDEF; q = 1, \dots, NP,$$

Restrição de Limite de Intercâmbios

$$0 \leq f_{skqt} \leq f_{skt}^{\max} FP_{kqt}, \quad k = 1, \dots, NS; s = 1, \dots, NS; q = 1, \dots, NP,$$

$$0 \leq f_{ksqt} \leq f_{kst}^{\max} FP_{kqt}, \quad k = 1, \dots, NS; s = 1, \dots, NS; q = 1, \dots, NP,$$

Restrição de Limite de Energia Armazenada ao Final do Estágio

$$0 \leq fv_{r,t+1} v_{r,t+1} \leq v_{r,t+1}^{\max}, \quad r = 1, \dots, NR,$$

Restrição de Limite de Geração Hidráulica

$$0 \leq gh_{rqt} \leq \left[gh_{rt}^{\max} - q_{rt}^{\min} + yp - qf_{rt} \right. \\ \left. - (1 - a_r)(\varphi_{rt1} y_{r,t-1} + \dots + \varphi_{rt,Prm} y_{r,t-Prm} + \eta_{rt}^{\omega_r}) \right] FP_{kqt},$$

$$r \in NR_k; k = 1, \dots, NS; q = 1, \dots, NP.$$

Cortes de Benders – Função de Custo Futuro

$$\alpha_{t+1} - \sum_{r=1}^{NR} \overline{\pi_{rct,v}} v_{r,t+1} - \sum_{r=1}^{NR} \overline{\pi_{rct,y1}} (\varphi_{rt1} y_{r,t-1}^{\omega_r} + \dots + \varphi_{rt,Prm} y_{r,t-Prm}^{\omega_r} + \eta_{rt}^{\omega_r}) \\ - \sum_{r=1}^{NR} \overline{\pi_{rct,y2}} y_{r,t-1}^{\omega_r} - \dots - \sum_{r=1}^{NR} \overline{\pi_{rct,yp}} y_{r,t-Prm+1}^{\omega_r} \geq z_{t+1} - \sum_{r=1}^{NR} \overline{\pi_{rct,v}} v_{r,t+1}^{it} \\ - \sum_{r=1}^{NR} \overline{\pi_{rct,y1}} (\varphi_{rt1} y_{r,t-1}^{cen} + \dots + \varphi_{rt,Prm} y_{rt-Prm}^{cen} + \eta_{rt}^{cen}) - \sum_{r=1}^{NR} \overline{\pi_{rct,y2}} y_{r,t-1}^{cen} \\ - \dots - \sum_{r=1}^{NR} \overline{\pi_{rct,yp}} y_{r,t-Prm+1}^{cen}, \quad c = 1, \dots, NC.$$

3.4 PDDE NO PEN

No capítulo anterior foi discutido o algoritmo da PDDE e alguns conceitos importantes para a PDDE. Naquele momento, a PDDE foi apresentada para um problema com formulação genérica e esta seção descreverá como a PDDE é aplicada no PEN. De uma maneira geral, o algoritmo permanece exatamente o mesmo, com algumas alterações para levar em consideração as peculiaridades da formulação do PEN, devido à inclusão dos modelos REE e ARP(p).

Inicialmente, destaca-se a necessidade de atualizar a Função de Custo Futuro por uma Taxa de Desconto (β) definida pelo usuário. A taxa de desconto é um indicador financeiro para trazer o custo de operação futuro a valor presente. Dessa forma, deve-se atualizar o cálculo do limite superior utilizado no critério de parada.

$$Z_{SUP} = c_1^T x_1^* + \sum_{t=2}^T \frac{1}{(1+\beta)^{t-1}} \left(\sum_{\omega_t=1}^N \frac{c_t^T x_t^{\omega_t*}}{N} \right), \quad (3.96)$$

$$Z_{SUP}^{\omega} = c_1^T x_1^* + \sum_{t=2}^T \frac{1}{(1+\beta)^{t-1}} c_t^T x_t^{\omega_t*}. \quad (3.97)$$

Outra mudança importante ocorre no cálculo dos coeficientes dos cortes de Benders apresentados em (3.95). Os coeficientes de um Corte de Benders que compõe a FCF refletem o quanto seria gasto adicionalmente ou economizado no futuro se um determinado recurso tivesse uma unidade a mais ao final do estágio. No caso do PEN, um dos recursos que acopla os estágios é a energia armazenada e, portanto, o coeficiente reflete quanto seria economizado se o reservatório terminasse com 1 MWmês a mais de energia armazenada ao final do estágio, quando comparado com o valor da iteração em que o corte foi criado. Dessa forma, o coeficiente é composto pelos multiplicadores de Lagrange, que estão associados à energia armazenada inicial, visto que o corte deve ser adicionado ao nó anterior.

Uma maneira de determinar o equacionamento necessário para obter os coeficientes do Corte de Benders é construir a função objetivo do problema dual, conforme foi apresentado no capítulo anterior. Neste caso, a função objetivo é formada pela soma dos produtos dos multiplicadores de Lagrange pela restrição associada ao respectivo multiplicador. Ao derivar a função objetivo do problema dual encontra-se a variação marginal do problema dual em relação àquela variável, visto que, por ser um problema de programação linear, o valor da função objetivo é o mesmo para a solução ótima do problema primal e dual, portanto, tem-se a variação marginal do problema primal. A função objetivo do problema dual de (3.95) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
z_t^{\omega_t} = & \text{Max } \lambda^\top f v_{rt} v_{rt} - \lambda^\top q_{rt}^{\min} - \lambda^\top e v_{rt} + \lambda^\top q c_{rt} - \lambda^\top v m_{rt} \\
& + \lambda^\top \left[f c_{rt} a_r (\phi_{rt1} y_{r,t-1} + \dots + \phi_{rt,Prm} y_{r,t-Prm} + \eta_{rt}) \right] \\
& + v^\top L_{kt} F C A_{kqt} F P_{kqt} - v^\top \sum_{r \in NR_k} (q_{rt}^{\min} + e s_{rt} - y p + q f_{rt} + g p_{rt}) F P_{kqt} \\
& - v^\top \sum_{r \in NR_k} \left[(1 - a_r) (\phi_{rt1} y_{r,t-1} + \dots + \phi_{rt,Prm} y_{r,t-Prm} + \eta_{rt}) \right] F P_{kqt} \\
& - \gamma^\top \left[(1 - a_r) (\phi_{rt1} y_{r,t-1} + \dots + \phi_{rt,Prm} y_{r,t-Prm} + \eta_{rt}) \right] F P_{kqt} \\
& + \gamma^\top \left[g h_{rt}^{\max} - q_{rt}^{\min} + y p - q f_{rt} \right] F P_{kqt} + \psi_1^\top v_{rt}^{\max} \\
& + \psi_2^\top f_{skt}^{\max} F P_{kqt} + \psi_3^\top f_{kst}^{\max} F P_{kqt} + \psi_4^\top g_{jt}^{\max} F P_{kqt} \\
& + \psi_4^\top g_{jt}^{\min} F P_{kqt} + \psi_5^\top d_{kht}^{\max} F P_{kqt} + \chi^\top \overline{z_{t+1}} - \chi^\top \sum_{r=1}^{NR} \overline{\pi_{rct,v}} v_{r,t+1}^{it} \\
& - \chi^\top \sum_{r=1}^{NR} \overline{\pi_{rct,y1}} (\phi_{rt1} y_{r,t-1}^{cen} + \dots + \phi_{rt,Prm} y_{r,t-Prm}^{cen} + \eta_{rt}^{cen}) \\
& - \chi^\top \left(\sum_{r=1}^{NR} \overline{\pi_{rct,y2}} y_{r,t-1}^{cen} + \dots + \sum_{r=1}^{NR} \overline{\pi_{rct,yp}} y_{r,t-Prm+1}^{cen} \right) \\
& + \chi^\top \sum_{r=1}^{NR} \overline{\pi_{rct,y1}} (\phi_{rt1} y_{r,t-1}^{\omega_t} + \dots + \phi_{rt,Prm} y_{r,t-Prm}^{\omega_t} + \eta_{rt}^{\omega_t}) \\
& + \chi^\top \left(\sum_{r=1}^{NR} \overline{\pi_{rct,y2}} y_{r,t-1}^{\omega_t} + \dots + \sum_{r=1}^{NR} \overline{\pi_{rct,yp}} y_{r,t-Prm+1}^{\omega_t} \right),
\end{aligned} \tag{3.98}$$

em que:

- λ Vetor de multiplicadores de Lagrange associados à restrição de balanço energético;
- v Vetor de multiplicadores de Lagrange associados à restrição de atendimento a demanda;
- γ Vetor de multiplicadores de Lagrange associados à restrição de geração hidráulica máxima;
- Ψ_1 Vetor de multiplicadores de Lagrange associados à restrição de energia armazenada máxima;
- Ψ_2, Ψ_3 Vetores de multiplicadores de Lagrange associados às restrições de intercâmbios máximos;
- Ψ_4 Vetor de multiplicadores de Lagrange associados à restrição de geração térmica máxima;

- Ψ_5 Vetor de multiplicadores de Lagrange associados à restrição de déficit de energia máximo;
- χ Vetor de multiplicadores de Lagrange associados aos Cortes de Benders.

Sabendo que²⁴

$$\begin{aligned} \pi_{r,v_{rt+1}} = \frac{\partial z_t^{\omega_t}}{\partial v_{rt}} = & \lambda_r \frac{\partial(fv_{rt}v_{rt})}{\partial v_{rt}} + \lambda_r \frac{\partial(fc_{rt})}{\partial v_{rt}} EC_{rt} - \lambda_r \frac{\partial(q_{rt}^{\min})}{\partial v_{rt}} \\ & - \lambda_r \frac{\partial(ev_{rt})}{\partial v_{rt}} - \left(\sum_{q=1}^{NP} (v_{kq} FP_{kqt}) \right) \left[\frac{\partial(q_{rt}^{\min})}{\partial v_{rt}} \right] \\ & + \left(\sum_{q=1}^{NP} (\gamma_{rq} FP_{kqt}) \right) \left[\frac{\partial(gh_{rt}^{\max})}{\partial v_{rt}} - \frac{\partial(q_{rt}^{\min})}{\partial v_{rt}} \right]. \end{aligned} \quad (3.99)$$

E dado que

$$fc_{rt} = bf_{2rt}(fv_{rt}v_{rt})^2 + bf_{1rt}(fv_{rt}v_{rt}) + bf_{0rt}, \quad (3.100)$$

$$q_{rt}^{\min} = bq_{2r}(fv_{rt}v_{rt})^2 + bq_{1r}(fv_{rt}v_{rt}) + bq_{0r}, \quad (3.101)$$

$$ev_{rt} = bev_{2rt}(fv_{rt}v_{rt})^2 + bev_{1rt}(fv_{rt}v_{rt}) + bev_{0rt}, \quad (3.102)$$

$$gh_{rt}^{\max} = bgh_{2r}(fv_{rt}v_{rt})^2 + bgh_{1r}(fv_{rt}v_{rt}) + bgh_{0r}. \quad (3.103)$$

Temos:

$$\begin{aligned} \pi_{r,v_{rt+1}} = & \lambda_r fv_{rt} + \lambda_r \left[2bf_{2rt}fv_{rt}^2v_{rt} + bf_{1rt}fv_{rt} \right] yc_{rt} \\ & - \lambda_r \left[2bq_{2rt}fv_{rt}^2v_{rt} + bq_{1rt}fv_{rt} \right] \\ & - \lambda_r \left[2bev_{2rt}fv_{rt}^2v_{rt} + bev_{1rt}fv_{rt} \right] \\ & - \left(\sum_{q=1}^{NP} (v_{kq} FP_{kqt}) \right) \left[2bq_{2rt}fv_{rt}^2v_{rt} + bq_{1rt}fv_{rt} \right] \\ & + \left(\sum_{q=1}^{NP} (\gamma_{rq} FP_{kqt}) \right) \left[2bgh_{2rt}fv_{rt}^2v_{rt} + bgh_{1rt}fv_{rt} \right] \\ & - \left(\sum_{q=1}^{NP} (\gamma_{rq} FP_{kqt}) \right) \left[2bq_{2rt}fv_{rt}^2v_{rt} + bq_{1rt}fv_{rt} \right]. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Em (3.104), verifica-se que os coeficientes do corte referente à energia armazenada são compostos pelos multiplicadores de Lagrange

²⁴ Embora no equacionamento (3.99) seja utilizada a notação $\partial z_t^{\omega_t} / \partial v_{rt}$, essa terminologia representa o subgradiente da função z_t , visto que como z_t que é uma função linear por partes nem sempre haverá derivada.

das restrições de balanço energético dos REEs, atendimento a demanda e limite de geração hidráulica máxima. Isto ocorre porque apesar da energia armazenada estar diretamente relacionada apenas à restrição de balanço energético, ela afeta outros atributos, como a energia de vazão mínima, energia evaporada e o coeficiente de correção da energia controlável.

O equacionamento para obtenção do coeficiente da energia afluente do estágio anterior segue o mesmo raciocínio do coeficiente relacionado à energia armazenada, isto é, deriva-se a função dual em relação à energia afluente do estágio anterior. Assim, o coeficiente é obtido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z_t^{\omega_i}}{\partial y_{r,t-1}^{\omega_i}} &= \pi_{r,y1} = \lambda_r f c_{rt} a_r \varphi_{rt1} + \chi^T \left[\pi_{r,y1} \varphi_{rt1} + \pi_{r,y2} \right] \\
 &+ \left(\sum_{q=1}^{NP} (v_{kq} FP_{kqt}) \right) \left(2by_2 (1-a_r)^2 \varphi_{rt1} y_{rt}^{\omega_i} + by_{1r} (1-a_r) \varphi_{rt1} \right) \\
 &- \left(\sum_{q=1}^{NP} (v_{kq} FP_{kqt}) \right) (1-a_r) \varphi_{rt1} - \left(\sum_{q=1}^{NP} (\gamma_{rq} FP_{kqt}) \right) (1-a_r) \varphi_{rt1} \quad (3.105) \\
 &+ \left(\sum_{q=1}^{NP} (v_{kq} FP_{kqt}) \right) \left(2by_{2r} (1-a_r)^2 \varphi_{rt1} y_{rt}^{\omega_i} + by_{1r} (1-a_r) \varphi_{rt1} \right) \\
 &+ \left(\sum_{q=1}^{NP} (\gamma_{rq} FP_{kqt}) \right) \left(2by_{2r} (1-a_r)^2 \varphi_{rt1} y_{rt}^{\omega_i} + by_{1r} (1-a_r) \varphi_{rt1} \right).
 \end{aligned}$$

Da mesma forma, para dois estágios anteriores temos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z_t^{\omega_i}}{\partial y_{r,t-2}^{\omega_i}} &= \pi_{r,y2} = \lambda_r f c_{rt} a_r \varphi_{rt2} + \chi^T \left[\pi_{r,y1} \varphi_{rt2} + \pi_{r,y3} \right] \\
 &+ \left(\sum_{q=1}^{NP} (v_{kq} FP_{kqt}) \right) \left(2by_2 (1-a_r)^2 \varphi_{rt,2} y_{rt}^{\omega_i} + by_{1r} (1-a_r) \varphi_{rt2} \right) \\
 &- \left(\sum_{q=1}^{NP} (v_{kq} FP_{kqt}) \right) (1-a_r) \varphi_{rt2} - \left(\sum_{q=1}^{NP} (\gamma_{rq} FP_{kqt}) \right) (1-a_r) \varphi_{rt2} \quad (3.106) \\
 &+ \left(\sum_{q=1}^{NP} (v_{kq} FP_{kqt}) \right) \left(2by_{2r} (1-a_r)^2 \varphi_{rt,2} y_{rt}^{\omega_i} + by_{1r} (1-a_r) \varphi_{rt2} \right) \\
 &+ \left(\sum_{q=1}^{NP} (\gamma_{rq} FP_{kqt}) \right) \left(2by_{2r} (1-a_r)^2 \varphi_{rt,2} y_{rt}^{\omega_i} + by_{1r} (1-a_r) \varphi_{rt2} \right).
 \end{aligned}$$

Assim, podemos generalizar a equação para a energia afluyente de p estágios anteriores:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z_r^{\omega_i}}{\partial y_{r,t-p_r}^{\omega_i}} &= \pi_{r,y p_r} = \lambda_r f c_{rt} a_r \varphi_{rtp} + \chi^T \left[\pi_{r,y1} \varphi_{rtp} + \pi_{r,y(p+1)} \right] \\
 &+ \left(\sum_{q=1}^{NP} (v_{kq} FP_{kqt}) \right) \left(2by_2 (1-a_r)^2 \varphi_{rt,p} y_{rt}^{\omega_i} + by_{1r} (1-a_r) \varphi_{rtp} \right) \\
 &- \left(\sum_{q=1}^{NP} (v_{kq} FP_{kqt}) \right) (1-a_r) \varphi_{rtp} - \left(\sum_{q=1}^{NP} (\gamma_{rq} FP_{kqt}) \right) (1-a_r) \varphi_{rtp} \quad (3.107) \\
 &+ \left(\sum_{q=1}^{NP} (v_{kq} FP_{kqt}) \right) \left(2by_{2r} (1-a_r)^2 \varphi_{rt,p} y_{rt}^{\omega_i} + by_{1r} (1-a_r) \varphi_{rtp} \right) \\
 &+ \left(\sum_{q=1}^{NP} (\gamma_{rq} FP_{kqt}) \right) \left(2by_{2r} (1-a_r)^2 \varphi_{rt,p} y_{rt}^{\omega_i} + by_{1r} (1-a_r) \varphi_{rtp} \right).
 \end{aligned}$$

3.5 ASPECTOS PROBLEMÁTICOS DA MODELAGEM

No decorrer deste capítulo foi apresentada a modelagem proposta para o PEN, porém existem alguns aspectos que são importantes de serem destacados. Primeiramente, ressalta-se que a PDDE é uma estratégia que foi desenvolvida para problemas convexos, no caso do PEN o modelo é considerado linear e, portanto, convexo. No entanto, a seguir será mostrado que o modelo torna-se não linear devido a algumas características e, conseqüentemente, pode ser não convexo. Como a análise de convexidade é bastante complexa para um problema como o PEN, esta seção apresentará apenas as não linearidades e no Capítulo 5 serão feitos alguns estudos para avaliar a consequência das não linearidades.

Esta seção será dividida nas duas principais modelagens do problema: REE e ARP(p). Em cada uma dessas modelagens serão discutidos os aspectos problemáticos, que terão algumas soluções propostas no capítulo seguinte.

3.5.1 REE

No PEN a energia armazenada é uma variável de estado do problema; isto é, a decisão em um determinado nó depende da energia

armazenada ao final do nó antecessor. Dessa forma, ao fazer ajustes quadráticos em alguns dos atributos do REE, conforme discutido na Seção 3.1, adicionam-se não linearidades ao problema. Na sequência são apresentados todos os atributos que são determinados em função de v :

$$fc_{rt} = bf_{2rt}(fv_{rt}v_{rt})^2 + bf_{1rt}(fv_{rt}v_{rt}) + bf_{0rt}, \quad (3.108)$$

$$q_{rt}^{\min} = bq_{2r}(fv_{rt}v_{rt})^2 + bq_{1r}(fv_{rt}v_{rt}) + bq_{0r}, \quad (3.109)$$

$$ev_{rt} = bev_{2rt}(fv_{rt}v_{rt})^2 + bev_{1rt}(fv_{rt}v_{rt}) + bev_{0rt}, \quad (3.110)$$

$$gh_{rt}^{\max} = bgh_{2r}(fv_{rt}v_{rt})^2 + bgh_{1r}(fv_{rt}v_{rt}) + bgh_{0r}. \quad (3.111)$$

Apesar de se utilizar a energia armazenada no início do estágio para calcular os atributos acima, essas funções farão parte do corte que será adicionado ao estágio anterior. Assim, conforme mostrado, as não linearidades devido às funções quadráticas ficam mais evidentes no cálculo do coeficiente do corte associado à energia armazenada (3.104), no qual se observa que o coeficiente que deveria ser constante é função da energia armazenada ao final do estágio em que o corte foi adicionado.

Além disso, há a mesma dificuldade no cálculo das perdas de energia fio d'água que depende da Energia Afluente, que também é variável de estado quando se utiliza o modelo $ARP(p)$. A Equação (3.112) apresenta a formulação para determinar yp , na qual se observa a dependência com a Energia Fio d'Água Bruta que é definida por (3.113) em função das Energias Afluentes anteriores.

$$yp = by_{2r}yb_{rt}^{\omega_i} + by_{1r}yb_{rt}^{\omega_i} + by_{0r}, \quad (3.112)$$

$$yb_{rt}^{\omega_i} = (1 - a_r)(\varphi_{rt1}y_{r,t-1}^{\omega_i} + \dots + \varphi_{rt,P_{rm}}y_{r,t-P_{rm}}^{\omega_i} + \eta_{rt}^{\omega_i}), \quad (3.113)$$

Dessa forma, tem-se que, ao considerar as perdas, adiciona-se uma função quadrática à formulação que depende da variável de estado y_t .

3.5.2 Modelo $ARP(p)$

Na modelagem atual o resíduo é ajustado para manter o primeiro e segundo momento estatístico e garantir que a Energia Afluente seja sempre positiva. Nesse sentido, apresenta-se, novamente, o Modelo $ARP(p)$, com a notação mais compacta para facilitar:

$$y_{r,t} = \varphi_{rt1}y_{r,t-1} + \dots + \varphi_{rt,P_{rm}}y_{r,t-P_{rm}} + \eta_{rt} + \sigma_{rt}e^{(w_{rt}\sigma_{\xi_{rt}} + a_{rt})} + \sigma_{rt}\Lambda_{rt}. \quad (3.114)$$

$$\eta_{rt} = \mu_{ri}^{(m)} - \varphi_{rli}^{(m)}\mu_{ri}^{(m-1)} - \dots - \varphi_{rP_{rm},i}^{(m)}\mu_{ri}^{(m-P_{rm})}. \quad (3.115)$$

Nessa notação, tem-se que (3.56) pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\Lambda = \left(-\varphi_{rt1} y_{r,t-1} - \dots - \varphi_{rt,Prm} y_{r,t-Prm} - \eta_{rt} \right) / \sigma^{(m)} \quad (3.116)$$

Assim, ao substituir (3.116) em (3.114), obtém-se:

$$y_{rt} = \sigma_{rt} \exp \left(w_{rt} \sigma_{\xi_{rt}} + \alpha_{rt} \right). \quad (3.117)$$

Isto é, ao ajustar o resíduo para depender do cenário em que foi criado, como foi feito em (3.56), eliminam-se os coeficientes AutoRegressivos que contribuem linearmente para o modelo. Isto porque os parâmetros que ajustam o resíduo dependem dos coeficientes e das realizações anteriores. Com isso, verifica-se uma não-linearidade no modelo atual, que pode tornar o problema não-convexo e, consequentemente, inviável de ser solucionado pela estratégia de solução utilizada (PDDE).

Além disso, é importante destacar que a dificuldade encontrada no modelo advém do fato de que alguns parâmetros dependem das realizações anteriores, isto é, os ajustes ao ruído branco gaussiano dependem do cenário em que estão sendo considerados. Com isso, o algoritmo da PDDE não deve mais compartilhar os cortes de Benders, apenas as soluções duais (multiplicadores de Lagrange) podem ser compartilhadas em alguns casos, como foi discutido na Seção 2.5.2.

3.6 CONCLUSÃO

Neste capítulo foram discutidos os principais aspectos de modelagem do PEN. Primeiramente, foi apresentado o Reservatório Equivalente de Energia que, como comentado, é uma representação que pode ser adequada para o PEN, pois se tem interesse principalmente no montante de energia hidrelétrica gerada ao invés da energia despachada individualmente (ARVANITIDIS e ROSING, 1970a). A representação das usinas hidrelétricas por meio de reservatórios equivalentes de energia permite reduzir significativamente o número de variáveis do problema e a quantidade de restrições. Com isso, reduz-se drasticamente o tempo de processamento para determinar a política de operação ótima.

O modelo de geração de séries sintéticas é de fundamental importância nos estudos do planejamento da operação energética, visto que as políticas operativas serão definidas com base nos cenários de afluência determinados por este modelo. Este capítulo apresentou o modelo $ARP(p)$, usado no PEN, que considera as afluências dos p meses anteriores para calcular a afluência no mês em análise. Para tanto, deve-

se definir quantos meses anteriores serão considerados, ou seja, determinar a ordem do modelo, a qual foi feita utilizando a função de auto-correlação parcial. Em seguida, calculam-se os coeficientes AutoRegressivos com base na função de auto-correlação, assim como os parâmetros usados na determinação dos resíduos.

Tendo em vista a apresentação da metodologia PDDE feita no Capítulo 2, neste capítulo discutiu-se a aplicação da PDDE ao PEN. No PEN, a principal diferença, com a PDDE apresentada do Capítulo 2, é o cálculo dos coeficientes do corte de Benders devido às modelagens do REE e $ARP(p)$. No entanto, conforme foi apresentado ao final do capítulo, essas modelagens podem causar consequências indesejáveis na PDDE, sendo que algumas sugestões para atacar esses aspectos problemáticos serão apresentadas no próximo capítulo.

4. CONTRIBUIÇÕES APLICADAS AO PEN

Neste capítulo são discutidas as propostas estudadas e implementadas ao longo do doutorado. Nesse sentido, o capítulo está dividido em sete tópicos principais. No primeiro serão apresentadas alternativas de modelagem para solucionar os aspectos problemáticos descritos no final do capítulo anterior. No segundo, discute-se o uso de técnicas de amostragem que podem substituir o Monte Carlo. Na sequência, descreve-se um novo critério de parada para a PDDE. O quarto tópico discute-se a avaliação da qualidade de solução com uma alternativa mais viável do ponto de vista computacional. Os tópicos cinco e seis focam em metodologias para melhorar o desempenho da PDDE por meio de estratégias de solução da PDDE e a seleção de cortes. Por fim, apresenta-se uma metodologia de aversão a risco, de maneira a construir políticas de operação que protejam o sistema de cenários críticos.

4.1 MODELAGEM DO PEN

Nessa seção são apresentadas alternativas para resolver os aspectos descritos na Seção 3.5, bem como algumas propostas que alteram, de alguma forma, a modelagem do PEN.

4.1.1 Correção do REE

Os aspectos problemáticos do REE decorrem de alguns atributos que são calculados por uma função quadrática da energia armazenada. Estes aspectos, entretanto, podem ser resolvidos ao se utilizar uma função linear. De maneira a comparar a aproximação quadrática e a linear, será avaliado o R-Quadrado²⁵ das duas aproximações. A Tabela 2 mostra o valor do R-Quadrado da função linear.

²⁵ O R-Quadrado é uma medida estatística do quão bem a função é ajustada aos pontos reais, variando entre 0 e 1. Nesse caso, um R-Quadrado igual 1 indica que a função passa por cima de todos os pontos originais, ou seja, uma aproximação perfeita para os pontos fornecidos.

Tabela 2 - R-Quadrado da aproximação linear.

Atributos	SE-CO	S	NE	N
q^{\min}	0,931	0,943	0,926	0,910
ev	0,998	0,989	0,998	0,999
gh^{\max}	0,931	0,933	0,919	0,950
fc	0,933	0,942	0,926	0,910

Sabe-se que ao ajustar uma função quadrática em três pontos, esta função irá passar exatamente em cima dos três pontos. Dessa forma, tem-se que o R-Quadrado da aproximação quadrática será sempre unitário. Assim, ao comparar os valores da Tabela 2 com 1, verifica-se que a aproximação linear produz resultados quase tão bons quanto à quadrática e evita as não linearidades.

O caso das Perdas de Energia Fio d'Água é um pouco mais grave, pois além da aproximação quadrática, têm-se os limites $y b^{\min}$ e $y b^{\max}$. Assim, além de substituir a aproximação quadrática pela linear, devem-se ignorar os limites estabelecidos para as perdas. Nesse caso, se a função linear que descrever as perdas tiver coeficiente linear menor que 1, $y b^{\max}$ pode ser ignorado sem dificuldades. Porém, o $y b^{\min}$ só pode ser ignorado se for igual a zero, caso contrário quando ignorado pode fazer com que as perdas sejam negativas, o que não deveria acontecer. Por outro lado, se o coeficiente linear for maior que 1 (um), não se pode usar a aproximação linear, visto que as perdas seriam maiores que a Energia Fio d'Água Bruta. Destaca-se que essa solução não foi implementada no modelo computacional e, portanto, ignoram-se as perdas de Energia Fio D'Água quando se utiliza o modelo $ARP(p)$ e se deseja uma formulação totalmente linear.

4.1.2 Geração alternativa da árvore de cenários

Conforme foi apresentado anteriormente, o modelo $ARP(p)$ proposto por (CEPEL, 2001) apresenta uma não-linearidade que pode fazer com que a PDDE encontre uma política de operação sem sentido para o problema. Dessa forma, serão apresentadas duas metodologias alternativas que, assim como a anterior, foram implementadas no modelo com o intuito de contornar estas dificuldades.

4.1.2.1 Modelo AutoRegressivo Periódico Modificado

Inicialmente, vale lembrar que a dificuldade encontrada no modelo discutido na Seção 3.2 é consequência de alguns parâmetros dos

resíduos dependerem das realizações anteriores. Nesse sentido, para contornar esta dificuldade deve-se retirar esta dependência, porém mantendo os momentos estatísticos e garantindo que a energia afluyente seja sempre positiva. A solução final não é trivial, sendo que a sugestão proposta neste documento e implementada deve ser vista como uma ideia inicial. Esta proposta ainda tem algumas dificuldades, porém não conflita com o algoritmo de solução, no caso a PDDE.

Nesse sentido, propõe-se utilizar um parâmetro Λ único para todos os nós de um mesmo estágio, pois com um Λ único garante-se que o resíduo κ_t calculado em (3.52) é o mesmo para qualquer nó daquele estágio quando o ξ_t for o mesmo e, assim, pode-se utilizar a modelagem apresentada na Seção 3.2. No entanto, para garantir que a energia afluyente seja sempre positiva, deve-se utilizar o maior valor de Λ dentre todos os nós que compõem um determinado estágio da árvore. Assim,

$$\Lambda_t^{\text{MAX}} = \max(\Lambda_t^{\omega}). \quad (4.1)$$

Em que, Λ_t^{MAX} é o maior valor entre os nós de todos os cenários ω_t , no estágio t , que por simplicidade será denominado de Λ^{MAX} no decorrer deste documento. Com isso, os parâmetros que definem o resíduo serão dados por:

$$\theta = 1 + \frac{\sigma_{\kappa}^{(m)^2}}{\Lambda^{\text{MAX}^2}}, \quad (4.2)$$

$$\sigma_{\xi} = \sqrt{\ln(\theta)}, \quad (4.3)$$

$$\alpha = \ln \left(\frac{\sigma_{\kappa}^{(m)}}{\sqrt{\theta(\theta-1)}} \right). \quad (4.4)$$

Dessa forma, o novo modelo ARP(p), que será denominado de ARP(p) Modificado, é dado por:

$$y_{r,t} = \phi_{rt1} y_{r,t-1} + \dots + \phi_{rt,Prm} y_{r,t-Prm} + \eta_{rt} + \sigma_{rt} e^{\left(w_{rt} \sigma_{\xi_{rt}} + \alpha_{rt}\right)} + \sigma_{rt} \Lambda_{rt}^{\text{MAX}}. \quad (4.5)$$

A principal dificuldade dessa estratégia é que o valor do Λ^{MAX} pode ser muito alto e dificilmente seria possível manter os momentos estatísticos próximos aos valores do histórico, o que inutiliza a sua proposição. Assim, para viabilizar essa alternativa, aplica-se apenas aos cenários que são sorteados pela PDDE, como consequência não será possível reamostrar os cenários a cada iteração. Isto porque se o Λ^{MAX} for mantido fixo, ao reamostrar os cenários o valor do Λ^{MAX} pode não

ser suficientemente grande e gerar Energias Afluentes negativas. No entanto, se o valor do Λ^{MAX} for recalculado em todas as reamostragens os cortes criados até então não serão mais válidos para a nova árvore que é obtida com o novo Λ^{MAX} .

Assim, ao utilizar Λ^{MAX} sem a reamostragem pode-se comprometer o desempenho da PDDE, embora a PDDE torna-se uma estratégia de solução aplicável. Nesse caso o cálculo do coeficiente do corte apresentado em (3.107) torna-se válido.

4.1.2.2 Modelo Independente

O modelo Independente não utiliza nenhuma informação das realizações anteriores para gerar novos valores de Energia Afluente e, portanto, o modelo não tem nenhuma dependência temporal como é o caso do modelo $\text{ARP}(p)$. No modelo Independente utiliza-se informação de média, variância e assimetria dos dados do histórico para gerar as Energias Afluentes. Para tanto, manteve-se a abordagem de se usar uma LogNormal a três parâmetros, proposta por (CHARBENEAU, 1978), porém modelando a Energia Afluente diretamente e não um resíduo como era o caso no modelo $\text{ARP}(p)$. Nesse caso, o sorteio também é feito com base em uma distribuição Normal e, por isso, faz-se necessário definir as relações para calcular a Energia Afluente com a distribuição desejada. Assim, tem-se que:

$$x = \ln(y - \Lambda). \quad (4.6)$$

Em que

x Variável aleatória com distribuição Normal, $N(\mu_x, \sigma_x^2)$;

μ_x Média da variável x ;

σ_x Desvio Padrão da variável x ;

Λ Deslocamento da Energia Afluente;

y Energia Afluente com distribuição LogNormal.

Dessa forma, o cálculo de y é dado por:

$$y = \exp(x) + \Lambda. \quad (4.7)$$

Na prática o sorteio é feito com base em uma distribuição Normal com média zero e variância unitária, com isso, y é calculado pelo seguinte equacionamento:

$$y = \exp(\xi \sigma_x + \mu_x) + \Lambda. \quad (4.8)$$

Em que,

ξ Variável aleatória com distribuição Normal, $N(0,1)$.

De acordo com (CHARBENEAU, 1978), os parâmetros μ_x , σ_x e Λ são calculados por (4.9)-(4.11) para obter a melhor aproximação dos três primeiros momentos estatísticos de y .

$$\sigma_x^2 = \log(\phi), \quad (4.9)$$

$$\mu_x = \log\left(\frac{\sigma_y}{\sqrt{\phi^2 - \phi}}\right), \quad (4.10)$$

$$\Lambda = \mu_y - \frac{\sigma_y}{\sqrt{\phi - 1}}, \quad (4.11)$$

$$\phi^3 + 3\phi^2 - (4 + \gamma_y^2) = 0. \quad (4.12)$$

Em que

- μ_y Média da Energia Afluente;
- σ_y Desvio Padrão da Energia Afluente;
- γ_y Assimetria²⁶ da Energia Afluente.

Em (4.12) ϕ é a única raiz real do polinômio e será sempre maior ou igual a 1 (CHARBENEAU, 1978). Assim, a formulação para o modelo Independente é dada por:

$$y_{m+12 \cdot (t-1), i} = e^{\mu_i^{(m)} + \sigma_i^{(m)}(D\xi_i)} + \Lambda_i^{(m)}, \quad (4.13)$$

Dessa forma, como se pode perceber pelas formulações acima, os parâmetros $\mu_i^{(m)}$, $\sigma_i^{(m)}$ e $\Lambda_i^{(m)}$ são calculados para cada mês m e REE i . Além disso, a energia afluente calculada para cada nó independe do cenário, pois a mesma não depende das realizações anteriores. Com isso, tem-se que a árvore de cenários é definida pela energia afluente diretamente, não pelo ruído como era nos casos anteriores. Isto garante as propriedades requeridas pelo algoritmo da PDDE, conforme discutido no Capítulo 2.

4.1.3 Nó fantasma

No planejamento anual da operação energética as decisões são tomadas no início do mês de estudo, para todo o mês. Entretanto, em geral é difícil de ter uma boa estimativa da Energia Afluente do primeiro estágio, assim faz-se necessário considerar o primeiro estágio como

²⁶ A assimetria, ou terceiro momento estatístico, é uma medida estatística que define o quanto a função de distribuição de probabilidade é simétrica em relação à média. Quando a assimetria for nula a FDP é simétrica, caso contrário a função será assimétrica e a assimetria será diferente de zero.

estocástico também, apesar da teoria de otimização estocástica requerer que o primeiro estágio seja determinístico, pois deve-se ter uma única decisão no mesmo. No caso do PEN, isso não é uma questão importante, visto que as decisões operativas não são feitas pelo PEN, mas sim por outro modelo computacional na etapa de curto prazo no Programa Mensal da Operação (PMO).

A principal restrição de considerar o primeiro estágio estocástico é devido ao critério de parada da PDDE. Neste sentido, será considerado que se tem um nó determinístico no estágio zero, isto é, um estágio antes do primeiro. Neste nó não se toma nenhuma decisão, pois independentemente das consequências na operação futura já se conhece o volume final do estágio zero, que será o volume inicial do primeiro estágio. Assim, esse nó fictício só servirá para o cálculo do Z_{INF} , visto que não tem custo de operação imediato e, portanto, não contribui com o Z_{SUP} . Para tanto, o primeiro estágio gera cortes de Benders ao estágio 0 e, assim, o limite Z_{INF} é calculado no estágio zero.

4.1.4 Variável de folga no Balanço Energético

Ao longo deste documento considerou-se que o PEN é um problema de recurso relativamente completo, isto é, qualquer decisão tomada em um estágio t garante que o problema do estágio $t+1$ será viável para qualquer realização. No entanto, isto pode não ser verdade na restrição de Balanço Energético, visto que o lado direito da restrição pode ser menor do que a Energia Armazenável Mínima tornando o problema inviável. Nesse sentido, adicionou-se uma variável de folga (fg) na restrição, conforme pode ser visto em (4.14).

$$v_{r,t+1} + s_{rt} + \sum_{q=1}^{NP} gh_{rq,t} - fg_{rt} = fv_{rt}v_{rt} - ev_{rt} - q_{rt}^{\min} + qc_{rt} - vm_{rt} + fc_{rt}a_r \left(\varphi_{r1}y_{r,t-1} + \dots + \varphi_{rt,P_{rm}}y_{r,t-P_{rm}} + \eta_{rt}^{\omega_r} \right), \quad r = 1, \dots, NR, \quad (4.14)$$

Em (4.14) observa-se que quanto maior for fg mais energia estará disponível para o uso de hidrelétricas, porém não se deseja adicionar energia inexistente ao reservatório. Assim, para limitar o “uso” da variável de folga, faz-se necessário associar um custo bastante elevado que só permitirá a variável de folga ser diferente de zero quando não houver outra alternativa. No caso deste trabalho, optou-se por considerar que o custo de 1 MWmês da variável de folga é dado pelo maior custo incremental da função objetivo mais uma unidade, que é dado pelo custo

do déficit no último patamar de déficit. A Equação (4.15) apresenta a nova Função Obejtivo.

$$z_t = \text{Min} \sum_{j=1}^{NUT} \left(ct_j \sum_{q=1}^{NP} gt_{jq} \right) + \sum_{k=1}^{NS} \left(\sum_{h=1}^{NDEF} \left(cd_{kh} \sum_{q=1}^{NP} d_{khqt} \right) \right) + cf \sum_{r=1}^{NR} fg_r + \frac{1}{1+\beta} \alpha_{t+1} \quad (4.15)$$

Em que

cf Custo da variável de folga no Balanço Energético (R\$/MWhês).

4.2 TÉCNICAS DE AMOSTRAGEM

Considere o problema de dois estágios apresentado abaixo:

$$\min_{x_1 \in X_1} \{c_1^T x_1 + E[q_2(x_1, \xi_2)]\}. \quad (4.16)$$

Conforme discutido no Capítulo 2, o problema acima é, em geral, de difícil solução analítica, sendo necessário recorrer a técnicas de amostragem para viabilizar a solução do problema. Assim, considere o estimador do valor esperado acima como sendo:

$$q_{2N}(x) = \frac{1}{N} \sum_{\omega=1}^N q_2(x_1, \xi_2^\omega). \quad (4.17)$$

O conjunto de N amostras $\{\xi_2^1, \dots, \xi_2^N\}$ é sorteado de uma distribuição Ω_2 . Quando esses valores são sorteados via Monte Carlo, tem-se que as amostras são independente e identicamente distribuídas (iid). Assim, q_{2N} é um estimador não enviesado. Este pode ser considerado o sorteio mais simples e comum encontrado na literatura, principalmente quando se discute otimização estocástica (BAILEY *et al.*, 1999). De acordo com (DREW e HOMEM-DE-MELLO, 2006) uma sequência de valores ótimos (q_N) satisfaz o teorema do limite central, assim, tem-se que:

$$\sqrt{N} (q_N - q^*) \Rightarrow \text{Normal}(0, \sigma^*) \quad (4.18)$$

Em que q^* denota o valor ótimo do problema real, $\sigma^{*2} := \text{Var}[q_2(x_1^*, \xi_2)]$, x_1^* é a decisão ótima do problema real e o operador \Rightarrow define a convergência em distribuição (DREW e HOMEM-DE-MELLO, 2006). A convergência do MC é da ordem de $N^{1/2}$, conforme apresentado no Capítulo 2, assim, faz-se necessário incrementar o número de amostras por um fator de 100 para melhorar a convergência por um fator de 10.

Em geral, para resolver problemas reais, torna-se inviável utilizar um tamanho de amostra N que garanta um erro pequeno. Dessa forma, de acordo com (HOMEM-DE-MELLO, 2008), uma alternativa ao aumento de N é a redução da variância, que pode ser obtida com técnicas como o Quasi Monte Carlo (QMC) e o Latin Hypercube Sampling (LHS), que serão discutidas em mais detalhes nesta seção.

No caso do PEN, devido ao longo horizonte de estudo e a FDP da variável aleatória (afluência) ser contínua, faz-se necessário utilizar métodos de amostragem para discretizar a variável aleatória e para viabilizar a resolução do problema por PDDE. Assim, a amostragem ocorre em duas etapas: (i) para construir a árvore de cenários e (ii) para sortear cenários para resolver a árvore por meio da PDDE. A aplicação do QMC e LHS nessas duas etapas de amostragem também será alvo de discussão nesta seção.

Neste ponto é importante destacar que as três técnicas de amostragem (MC, QMC e LHS) sorteiam valores de uma distribuição Uniforme entre 0 e 1, $U(0,1)$. Assim, para obter o valor desejado, que é um valor com uma distribuição Normal $N(0,1)$, utiliza-se a função inversa de probabilidade acumulada da distribuição Normal (DEVROYE, 1986). Dessa forma, a discussão feita nos tópicos a seguir refere-se apenas a sorteios em uma distribuição $U(0,1)$.

4.2.1 Quasi Monte Carlo

O Quasi Monte Carlo (QMC) é um método de amostragem que busca selecionar pontos de maneira mais uniforme, em vez de sortear aleatoriamente (HOMEM-DE-MELLO, 2008). Assim, um dos principais objetivos no estudo do QMC é definir estratégias de seleção que encontrem um conjunto de pontos com a menor discrepância possível, em que a discrepância quantifica a diferença entre a distribuição dos pontos selecionados e a distribuição uniforme.

Atualmente existem inúmeros métodos que se propõem a encontrar um conjunto de pontos com baixa discrepância, veja (NIEDERREITER, 1992) e (L'ECUYER e LEMIEUX, 2005) para uma discussão detalhada sobre alguns dos principais métodos. Um grande número de métodos utiliza funções e regras complexas para definir o conjunto de pontos, sendo que o cálculo dos parâmetros dessas funções e regras é feito de acordo com a dimensão e número de pontos do problema em estudo. Neste ponto é importante destacar que os parâmetros não dependem de alguma característica do problema em estudo, mas apenas da dimensão e número de pontos, visto que o sorteio

é feito com base em uma distribuição uniforme que independe do problema.

Dessa forma, em vez de sortear valores aleatoriamente, o QMC seleciona esses valores na função densidade de probabilidade e, assim, tem-se sempre a mesma amostra quando se utiliza o mesmo método. Isto é uma desvantagem em casos que se deseja avaliar mais de uma árvore de cenários e/ou re-amostrar cenários a cada iteração do algoritmo, como é o caso do PEN. Além disso, apesar do QMC também aproximar o problema como o MC, por (4.17), pelo fato das amostras não serem iid como no MC, o cálculo da variância do estimador não é trivial e requer a determinação de algumas constantes que são difíceis de serem obtidas (HOMEM-DE-MELLO *et al.*, 2011).

Nesse sentido, é necessário adicionar alguma aleatoriedade aos pontos selecionados pelo QMC, e é exatamente isso que faz o QMC Aleatório (QMCA) (L'ECUYER e LEMIEUX, 2005). No QMCA utiliza-se um dos métodos do QMC para selecionar um conjunto de pontos que será constante e com outra metodologia faz-se um deslocamento aleatório nesses pontos, buscando a manutenção da baixa discrepância nos novos conjuntos de pontos. Assim como o QMC, existem inúmeras estratégias para fazer esse deslocamento, veja (L'ECUYER e LEMIEUX, 2005) para maiores detalhes.

Os cálculos dos parâmetros do QMC e do deslocamento são bastante complexos e não é o objetivo deste trabalho implementá-los no algoritmo do programa ou discuti-los em detalhes. Portanto, para este trabalho utilizou-se uma biblioteca de QMCA denominada de LIBSEQ e que poder ser obtida em (FRIEDEL e KELLER, 2010), esta biblioteca foi desenvolvida com base no trabalho de (FRIEDEL e KELLER, 2000).

Por fim, é importante destacar que a taxa de convergência do QMC é na ordem de $[(\log N)^s/N]$ (DREW e HOMEM-DE-MELLO, 2006), em que s é a dimensão da variável aleatória e N é o número de amostras. Essa taxa de convergência é assintoticamente melhor que $1/N^{1/2}$, porém quando s não é pequeno precisa-se de um N muito grande. No entanto, de acordo com (DREW e HOMEM-DE-MELLO, 2006) tem-se que essa taxa de convergência é um limite superior e que, em geral, o QMC se comporta muito melhor.

Para ilustrar a diferença entre o MC e o QMC, a Figura 30 apresenta um sorteio de 8 pontos em 2 dimensões com o MC, enquanto a Figura 31 mostra o mesmo caso com o sorteio QMC. Pelas figuras abaixo nota-se que o QMC apresenta uma distribuição mais uniforme que o MC, que para a dimensão apresentada no eixo das ordenadas teve

75% dos valores entre 0,7 e 1,0. Dessa forma, o conjunto de pontos do QMC tem uma discrepância em relação a distribuição Uniforme menor que o MC, indicando uma qualidade maior do QMC em encontrar pontos mais representativos.

Figura 30 - Sorteio de 8 pontos em 2 dimensões com o MC.

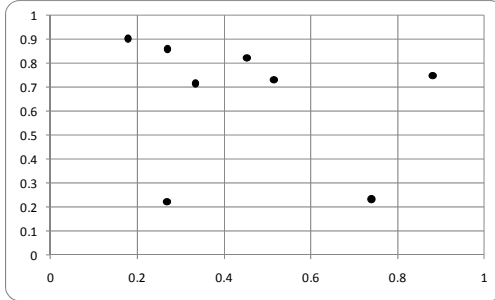
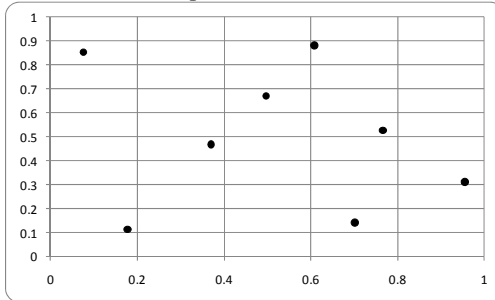


Figura 31 - Sorteio de 8 pontos em 2 dimensões com o QMC.



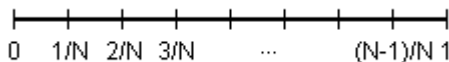
4.2.2 Latin Hypercube Sampling

Assim como o QMCA, o Latin Hypercube Sampling (LHS) é uma estratégia que busca encontrar pontos de maneira a reduzir a variância. Esta técnica é mais simples que o QMCA e foi primeiramente apresentada por (MCKAY *et al.*, 1979). De maneira a facilitar a compreensão do LHS, apresenta-se a metodologia para uma única dimensão e, em seguida, discute-se como a mesma é aplicada a variáveis aleatórias com s dimensões.

No caso unidimensional o LHS divide o intervalo de $[0,1]$ em N subintervalos uniformemente distribuídos, conforme apresentado na Figura 32, sendo que N é o número de amostras que se deseja sortear.

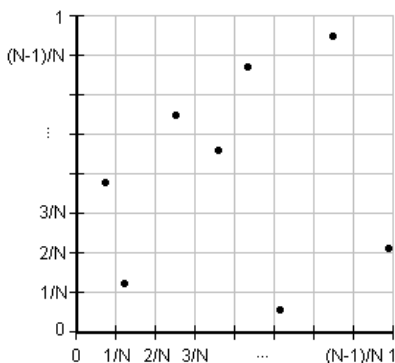
Então, sorteia-se um número pseudo-aleatório dentro de cada um dos N subintervalos.

Figura 32 - Intervalos para sorteio unidimensional de N amostras com o LHS.



No caso multidimensional, faz-se a mesma estratégia da Figura 32 para cada dimensão e combinam-se os valores sorteados em cada dimensão para formar o vetor de amostras. Considere um caso em que se sorteia N amostras para cada dimensão s . Nesse caso, se fossem feitas todas as combinações possíveis, o problema teria N^s amostras ao invés de N amostras, o que tornaria o problema inviável mesmo para s e N pequenos. No entanto, o LHS mantém o número total de N amostras ao fazer uma combinação aleatória entre os N pontos sorteados para cada dimensão, isto é, combinam-se amostras sorteadas de subintervalos diferentes para cada dimensão. A Figura 33 ilustra um caso em que N é igual a 8 e se tem duas dimensões, os pontos indicam os vetores que compõem as amostras sorteadas.

Figura 33 - Sorteio bidimensional de 8 amostras com o LHS.



No LHS a taxa de convergência é a mesma que do MC, $N^{1/2}$. Entretanto, este método garante que a variância será sempre menor do que no caso MC, isto é, $V_{\text{LHS}} \leq V_{\text{MC}}$, em que V_{LHS} e V_{MC} são as variâncias do LHS e MC, respectivamente, (MCKAY *et al.*, 1979). Com isso, garante-se uma redução no erro, mesmo que seja pequena.

De acordo com (BAILEY *et al.*, 1999), uma dificuldade do LHS é calcular a variância do estimador. Uma maneira de evitar isso é replicar o procedimento do LHS para blocos e utilizar o valor médio dos

blocos para estimar a variância. O próximo tópico discutirá este aspecto com foco no PEN.

4.2.3 Aplicação do QMCA e LHS no PEN

Como comentado o QMCA e o LHS são aplicados em duas etapas do PEN. Na primeira, eles são responsáveis por gerar os ruídos que irão compor a árvore de cenários, que serão utilizados pelo modelo $ARP(p)$ ou pela geração de Energia Afluente independente. Nessa etapa, sorteiam-se conjuntos de amostras para cada estágio, sendo que a dimensão de cada conjunto é definida pelo número de REEs e o número de amostras pelo número de aberturas do respectivo estágio.

Da mesma forma, o QMCA e o LHS também podem ser utilizados para sortear os cenários que serão utilizados na recursão progressiva da PDDE. Porém, como comentado, para ambas as técnicas têm-se dificuldade para estimar a variância, que no caso do PEN é o σ_Z (ver equação (2.48)) e é usado no critério de parada, sendo assim, não se poderia utilizar o critério de parada apresentado no Capítulo 2.

Para resolver a dificuldade apresentada no parágrafo anterior, propõe-se dividir os N cenários que devem ser sorteados em M grupos de K cenários, sendo que cada um dos M grupos é sorteado independentemente utilizando o LHS ou QMCA. Com isso, calculam-se os valores médios para cada um dos M grupos, que são iid entre eles. Portanto, esses M valores são utilizados para calcular o valor do Z_{SUP} e σ_Z para avaliar se a PDDE convergiu. Nesses casos o cálculo do Z_{INF} permanece inalterado.

Como comentado anteriormente, o QMCA tem a desvantagem de não funcionar muito bem para problemas com uma dimensão (s) grande e um número pequeno de amostras N , sendo este o caso do sorteio na recursão progressiva da PDDE no PEN. Isto porque, para um caso com apenas três anos de estudo, 36 estágios, e considerando um total de 200 cenários, valor tradicional nos estudos do PEN no Brasil, tem-se um caso com dimensão 36 e 200 amostras. A dimensão deve-se ao fato de que quando são sorteados cenários tem-se que definir um vetor de realizações para cada estágio. Além disso, é necessário dividir os 200 cenários em grupos menores, por exemplo, 5 grupos de 40 cenários, o que torna a dificuldade de usar o QMCA ainda maior.

4.3 CRITÉRIO DE PARADA DA PDDE

No Capítulo 2 discutiu-se, detalhadamente, o algoritmo da PDDE e o critério de parada proposto por (PEREIRA e PINTO, 1991). No entanto, o critério apresenta alguns conflitos e para facilitar a compreensão dessas dificuldades o Apêndice A apresenta uma breve revisão de testes de hipótese.

Atualmente, o critério de parada da PDDE utiliza um teste de hipótese bilateral, com nível de significância de 5%, em que:

$$H_0: Z_{INF} = Z_{ARVORE}$$

$$H_1: Z_{INF} \neq Z_{ARVORE}$$

Em que, o Z_{ARVORE} é o custo esperado de operação da árvore de cenários completa considerando a FCF que foi obtida na iteração em que o teste de hipótese está sendo analisado. Na prática não temos como calcular o Z_{ARVORE} , então toma-se Z_{SUP} como um estimador para este valor.

O conflito desse teste é que o processo iterativo da PDDE termina quando a hipótese nula é mantida, porém, como é mostrado no Apêndice A, ao manter a hipótese nula pouco se pode afirmar da igualdade. Na prática é necessário calcular a potência do teste para avaliar o risco de um erro Tipo II²⁷. Uma maneira intuitiva de verificar que o critério de parada tem esse conflito é reduzir o risco do erro Tipo I para 1%, nesse caso o intervalo de confiança será maior e, portanto, o algoritmo terá mais facilidade para satisfazer o critério de parada. Isto era esperado, pois ao reduzir o risco do erro Tipo I, eleva-se o risco do erro Tipo II, que seria manter a hipótese nula mesmo sendo falsa.

Dessa forma, Homem-de-Mello *et al.* (2011) propuseram duas possibilidades para lidar com o critério de parada. Na primeira, substitui-se o teste de hipótese bilateral por um teste unilateral, da seguinte forma:

$$H_0: Z_{INF} \leq Z_{ARVORE}$$

$$H_1: Z_{INF} > Z_{ARVORE}$$

Neste teste, a PDDE só irá interromper o algoritmo quando tiver uma certeza estatística muito forte de que o Z_{INF} ultrapassou o Z_{SUP} . No entanto, esta estratégia tem um aspecto problemático também, apesar do Z_{SUP} poder oscilar em torno do Z_{INF} , dificilmente o Z_{INF} ultrapassa o

²⁷ Em Teste de Hipóteses se está sujeito a dois tipos de erro: (i) erro Tipo I é a probabilidade de rejeitar a hipótese nula, quando ela deveria ser mantida; (ii) erro Tipo II é a probabilidade de manter a hipótese nula, quando ela deveria ser rejeitada.

Z_{SUP} de maneira significativa de forma a se estar estatisticamente confiante de que aconteceu.

A segunda possibilidade considerou o seguinte teste de hipótese:

$$H0: Z_{INF} \geq Z_{ARVORE}$$

$$H1: Z_{INF} < Z_{ARVORE}$$

Este teste de hipótese é equivalente ao teste original da PDDE, visto que o Z_{INF} está usualmente à esquerda do Z_{SUP} , $Z_{INF} < Z_{SUP}$, e dificilmente ficará significativamente à direita, $Z_{INF} > Z_{SUP}$. Dessa forma, a contribuição neste caso é considerar também o erro Tipo II, que com esse teste pode ser calculado mais facilmente por meio da determinação do poder do teste de hipótese. De acordo com (HOMEM-DE-MELLO *et al.*, 2011) o poder do teste de hipótese para o caso acima é dado por:

$$\beta(Z_{ARVORE}) = 1 - \Phi\left(\frac{Z_{INF} - Z_{ARVORE}}{\sigma_Z / N} + v_{1-\alpha}\right). \quad (4.19)$$

Em que,

$\beta(Z_{ARVORE})$ Poder do Teste de Hipótese para o valor Z_{ARVORE} ;

$\Phi(x)$ Valor da Função de Probabilidade (Φ) para o valor x ;

α Nível de confiança adotado;

$v_{1-\alpha}$ $\Phi^{-1}(1-\alpha)$.

Assim, tem-se que:

$$\Phi\left(\frac{Z_{INF} - Z_{ARVORE}}{\sigma_Z / \sqrt{N}} + v_{1-\alpha}\right) \leq \gamma. \quad (4.20)$$

Em que,

γ Probabilidade do erro Tipo II.

Sabendo que $\Phi^{-1}(\gamma) = v_\gamma = -v_{1-\gamma}$, pode-se definir a seguinte regra:

$$Z_{ARVORE} - Z_{INF} \geq \frac{\sigma_Z (v_{1-\alpha} + v_{1-\gamma})}{\sqrt{N}}. \quad (4.21)$$

Como o custo esperado de operação da árvore de cenários não está disponível para ser usado na análise do critério de parada, define-se uma variável δ que relaciona o Z_{ARVORE} e o Z_{INF} que é dada por:

$$\delta = \frac{Z_{ARVORE}}{Z_{INF}}. \quad (4.22)$$

Substituindo (4.22) em (4.20) e fazendo algumas manipulações, tem-se que:

$$\delta \geq 1 + \frac{\sigma_Z (v_{1-\alpha} + v_{1-\gamma})}{Z_{INF} \sqrt{N}}. \quad (4.23)$$

Nesse caso, considerando o caso limite, tem-se que:

$$\delta = 1 + \frac{\sigma_Z (v_{1-\alpha} + v_{1-\gamma})}{Z_{INF} \sqrt{N}}. \quad (4.24)$$

A expressão (4.23) indica que ao manter a hipótese nula, existe uma probabilidade de erro do Tipo II que é menor ou igual a γ quando $Z_{ARVORE} \geq \delta \cdot Z_{INF}$. Note que não se conhece o valor do Z_{ARVORE} para analisar a desigualdade, então, é difícil fazer alguma afirmação quanto ao erro Tipo II.

No entanto, ao considerar que o valor δ seja bastante próximo a 1, por exemplo, $\delta \leq 1,001$, sabe-se que o erro de manter a hipótese nula será menor do que o estipulado (γ) quando $Z_{ARVORE} \geq \delta \cdot Z_{INF}$. Nesse caso, ainda não sabemos o valor exato sobre o Z_{ARVORE} , porém se o valor do Z_{ARVORE} não for maior ou igual ao $\delta \cdot Z_{INF}$, podemos afirmar que Z_{INF} está muito próximo do Z_{ARVORE} o que indica o processo iterativo pode ser parado. Dessa forma, independentemente do valor do Z_{ARVORE} tem-se um forte indicativo de que a solução é muito boa.

Assim, o algoritmo da PDDE só deveria parar quando no teste hipótese acima a hipótese nula for mantida e quando o δ for muito próximo a 1. Com isso, garante-se um resultado mais consistente, visto que o erro Tipo I é menor que α e o erro Tipo II pode ser menor que γ .

4.4 AVALIAÇÃO DA QUALIDADE DA POLÍTICA

Nos casos em que é inviável resolver um problema estocástico original computacionalmente, faz-se necessário aproximar o problema original por meio de estratégias de amostragem, conforme foi discutido no Capítulo 2. Dessa forma, ao final do processo de otimização é importante avaliar a qualidade da solução encontrada perante o problema original. Nesse sentido, esta seção discutirá como avaliar a qualidade da política de operação no caso do PEN.

No PEN avaliar a qualidade da política de operação é verificar se a FCF fornece uma boa aproximação dos custos futuros de operação, ou seja, determinar se a política produz boas soluções. Para tanto, serão discutidas duas maneiras de fazer esta avaliação. Na primeira, será utilizada a forma tradicional que foi discutida na Seção 2.6 e, na

segunda, faz-se uma nova proposta com o intuito de reduzir o esforço computacional. Em ambos os casos, a qualidade da solução é avaliada pelo intervalo de confiança que, de maneira simples, é dado pela diferença entre um limite superior e inferior, sendo que estes valores serão definidos na sequência.

4.4.1 Cálculo do Limite Superior

Neste caso, o processo é exatamente igual ao descrito na Seção 2.6. A determinação do limite superior é bastante simples e requer pouco tempo computacional. Sorteiam-se novos ruídos do processo aleatório original e, com isso, constroem-se novos cenários independentes da árvore de cenários. Esses cenários serão simulados usando a FCF encontrada pela PDDE, em que o limite superior é calculado pelo valor esperado do custo total.

No sorteio desses novos cenários podem-se utilizar o MC, QMCA e LHS, sendo que nos dois últimos divide-se o número total de cenários a serem simulados em blocos de mesmo tamanho de forma a viabilizar o cálculo da variância, conforme foi comentado no sorteio dos cenários para a recursão progressiva da PDDE na Seção 4.2.3. O algoritmo abaixo ilustra como é feito o cálculo do limite superior que será denominado de U_{Nu} .

Algoritmo 3: Cálculo do Limite Superior

1. Carrega a informação da FCF obtida na PDDE;
2. Sorteia Nu cenários iid da distribuição de probabilidade original;
3. Faça de $\omega = 1, \dots, Nu$
 Faça $t = 1, \dots, T$
 Construa o PL para o cenário ω e estágio t ;
 Resolva o Problema (3.95);
 Fim
 Calcule o Z_{SUP}^{ω} ;
 Fim
4. Calcule o valor esperado (U_{Nu}) e o desvio padrão (S_U) do Limite Superior.

Em que,

$$Z_{SUP}^{\omega} = c_1^T x_1^{\omega*} + \sum_{t=2}^T \frac{c_t^T x_t^{\omega*}}{(1 + \beta)^{t-1}} \quad (4.25)$$

$$U_{Nu} = \frac{1}{Nu} \sum_{\omega=1}^{Nu} Z_{SUP}^{\omega} \quad (4.26)$$

$$S_U = \sqrt{\frac{1}{Nu-1} \sum_{\omega=1}^{Nu} (Z_{SUP}^{\omega} - U_{Nu})^2} \quad (4.27)$$

4.4.2 Cálculo do Limite Inferior

O cálculo do limite inferior requer um esforço computacional muito maior do que o do limite superior. Isto porque, para determinar o limite inferior, deve-se sortear Nl árvores de cenários independentemente e otimizá-las usando o algoritmo da PDDE. O limite inferior é formado pelo valor esperado do custo presente do primeiro estágio mais o custo futuro estimado no primeiro estágio (Z_{INF}), considerando que as Nl árvores de cenários são equiprováveis. Assim, pode-se descrever o algoritmo do cálculo do Limite Inferior, denominado de L_{Nl} , como sendo:

Algoritmo 4: Cálculo do Limite Inferior 1

1. Sorteia Nl árvores iid do processo original, com n aberturas;
2. Faça de $i = 1, \dots, Nl$
 Resolve a árvore i com a PDDE;
 Armazene o Z_{INF} obtido na última iteração da PDDE;
- Fim
3. Calcule o valor esperado (L_{Nl}) e o desvio padrão (S_L) do Limite Inferior.

Em que,

$$L_{Nl} = \frac{1}{Nl} \sum_{i=1}^{Nl} Z_{INF,i} \quad (4.28)$$

$$S_L = \sqrt{\frac{1}{Nl-1} \sum_{i=1}^{Nl} (Z_{INF,i} - L_{Nl})^2} \quad (4.29)$$

No entanto, o fato de o limite inferior requerer a otimização de cada uma das Nl árvores o torna inviável para ser utilizado regularmente. Dessa forma, Morton (2009) propôs uma alternativa que pode fornecer algumas informações acerca do Limite Inferior sem precisar otimizar cada uma das árvores. Neste caso, serão utilizadas informações da simulação, como é feito para calcular o limite superior, para se estimar o limite inferior. No entanto, os cenários que serão

simulados são sorteados dentro da árvore de cenários que foi utilizada na PDDE, ao invés da função densidade de probabilidade original como é o caso do cálculo de U_{NI} .

Sabe-se que ao sortear cenários da árvore de cenários da PDDE, pode-se calcular o limite superior dentro da árvore como sendo o valor esperado do somatório dos custos imediatos de todos os estágios e cenários, conforme (3.96) e (3.97). Dessa forma, tem-se que o Z_{SUP} é maior ou igual ao custo para a operação ótima dentro da árvore, que será denominado de Z_{ARVORE} , assim, $Z_{SUP} \geq Z_{ARVORE}$. Entretanto, se a FCF for perfeita, ou seja, conseguir descrever toda a árvore de cenários com exatidão, tem-se que $Z_{SUP} = Z_{ARVORE} = Z_{INF}$.

Por outro lado, ao sortear duas árvores do processo original e otimizá-las com exatidão, encontrar a FCF que melhor as descreve, o valor do Z_{SUP} e Z_{ARVORE} será diferente para cada árvore²⁸, sendo que o $E[Z_{ARVORE}] \leq z^*$, que é o valor ótimo do problema real (contínuo). Assim, se o algoritmo da PDDE for rodado até que o Z_{SUP} e o Z_{INF} estejam muito próximos, pode-se utilizar o Z_{SUP} e o erro de amostragem como valores estimados para o limite inferior. Além disso, pode-se utilizar o Z_{INF} como o limite inferior e acoplar a este valor o desvio padrão associado ao Z_{SUP} . Uma abordagem similar a essa já foi proposta para um caso de 2 estágios (BAYRAKSAN e MORTON, 2006). Em resumo, Morton (2009) propôs o seguinte algoritmo.

Algoritmo 5: Cálculo do Limite Inferior 2

1. Carrega a informação da FCF obtida na PDDE;
2. Sorteia NI cenários da árvore de cenários usada na PDDE;
3. Faça de $\omega = 1, \dots, NI$
 Faça $t = 1, \dots, T$
 Construa o PL para o cenário ω e estágio t ;
 Resolva o Problema (3.95);
 Fim
 Calcule o Z_{SUP}^{ω} ;
 Fim
 Calcule o Z_{INF} e Z_{SUP} ;
4. Calcule o L_{NI} e S_L com (4.30) e (4.31), respectivamente.

Em que,

²⁸ Exceto quando o número de aberturas em cada estágio é muito grande, visto que à medida que o número de aberturas cresce a Z_{ARVORE} converge ao z^* com probabilidade 1 (MORTON, 2009).

$$L_{NI} = \min(Z_{SUP}, Z_{INF}) \quad (4.30)$$

$$S_L = \sqrt{\frac{1}{NI-1} \sum_{\omega=1}^{NI} (Z_{SUP}^{\omega} - Z_{SUP})^2} \quad (4.31)$$

Com essa estratégia, reduz-se o tempo computacional de forma bastante significativa, viabilizando a avaliação da qualidade da política de operação. No entanto, a segunda estratégia pode proporcionar intervalos de confiança muito grandes, visto que é uma estratégia mais conservadora.

4.4.3 Construção do Intervalo de Confiança para o *gap*

Nas duas seções anteriores foram sugeridas estratégias para o cálculo do limite superior e inferior com o intuito de avaliar a qualidade da política de operação. Esta seção discutirá a construção do Intervalo de Confiança (IC) que será utilizado para fazer a análise da qualidade da FCF no PEN. O cálculo do IC independe do método utilizado para o cálculo dos limites superior e inferior.

Conforme foi discutido anteriormente, a política de operação é um mapeamento das consequências que as decisões em cada estágio têm sobre o custo futuro de operação. Nesse sentido, se a política tem uma boa qualidade, ou seja, o mapeamento abrange a maior parte do espectro de possibilidades, a diferença entre as decisões tomadas para o problema original com base nessa política e valor ótimo tem que ser pequena. No entanto, devido a limitações computacionais, os dois valores são inviáveis de serem obtidos; porém pode-se utilizar os valores dos limites superiores e inferiores para construir um intervalo de confiança unilateral para a diferença acima que será denotada de $EU - z^*$.

$$P \left\{ EU - z^* \leq (U_{Nu} - L_{NI})^+ + \frac{t_{NI-1, \alpha} S_L}{\sqrt{NI}} + \frac{t_{Nu-1, \alpha} S_U}{\sqrt{Nu}} \right\} \approx 1 - 2\alpha \quad (4.32)$$

Em que,

$t_{NI-1, \alpha}$ Distância em desvios padrões da distribuição *t-student* entre o valor médio e o valor que cobre $(1-\alpha)100\%$ da função de distribuição de probabilidade da *t-student* com $NI-1$ graus de liberdade;

$t_{Nu-1, \alpha}$ Distância de desvios padrões entre o valor médio e o valor que cobre $(1-\alpha)100\%$ da função de distribuição de probabilidade da *t-student* com $Nu-1$ graus de liberdade;

$(.)^+$ Indica o $\text{Max}(.,0)$.

Assim, o IC para uma confiança de $(1-2\alpha)$ é dado por:

$$IC = (U_{Nu} - L_{NI})^+ + \frac{t_{NI-1,\alpha} S_L}{\sqrt{NI}} + \frac{t_{Nu-1,\alpha} S_U}{\sqrt{Nu}} \quad (4.33)$$

Quanto menor o valor do IC melhor será a qualidade da política de operação calculada pela PDDE. Ressalta-se que existem outras estratégias para avaliar a qualidade da solução de problemas de programação estocástica, mas que não foram objeto de estudo neste trabalho, sendo que outras alternativas foram citadas na Seção 2.6.

4.5 ESTRATÉGIAS DE SOLUÇÃO DA PDDE

No Capítulo 2 foram discutidos diversos aspectos da otimização estocástica, dentre eles destaca-se a PDDE utilizada neste trabalho para encontrar a política de operação para o PEN. A PDDE é um processo iterativo no qual a cada iteração sorteiam-se cenários dentro de uma árvore de cenários que são percorridos nas recursões progressiva e regressiva.

Nesta seção serão apresentadas alternativas ao algoritmo tradicional da PDDE de maneira a produzir políticas de operação de melhor qualidade com um número menor de iterações e, portanto, melhorar o desempenho da PDDE. Novas estratégias de solução da PDDE já foram discutidas em (PHILPOTT e GUAN, 2008; DE MATOS *et al.*, 2011; SHAPIRO *et al.*, 2011) e focam principalmente na maneira de se percorrer os cenários sorteados na PDDE. Neste trabalho serão analisadas duas estratégias, discutidas em mais detalhes na sequência:

- Um cenário por recursão;
- Incrementando cenários por recursão.

4.5.1 Um cenário por recursão

Na PDDE tradicional sorteiam-se, por exemplo, N_C cenários, com isso percorrem-se todos os N_C cenários na recursão progressiva e se o algoritmo não convergiu retorna-se pela recursão regressiva em todos os cenários ao mesmo tempo. Entretanto, nas primeiras iterações quando a informação de custo futuro ainda é de baixa qualidade ou inexistente, a recursão regressiva construirá muitos cortes ao mesmo tempo, os quais podem não contribuir significativamente para o desempenho da PDDE.

Dessa forma, na estratégia apresentada em (PHILPOTT e GUAN, 2008; DE MATOS *et al.*, 2011) sugere-se percorrer um cenário por recursão. Com isso, percorre-se apenas o primeiro cenário na recursão progressiva, ao invés de percorrer todos os N_C cenários. Ao final da recursão progressiva retorna-se no mesmo cenário pela recursão regressiva construindo apenas um corte de Benders para cada estágio, o qual é compartilhado por todos os nós de um mesmo estágio.

Na sequência faz-se o mesmo processo para o segundo cenário, construindo, assim, o segundo corte para cada estágio. É importante notar que ao percorrer o segundo cenário já se tem uma primeira aproximação da Função de Custo Futuro e, portanto, não são tomadas decisões ingênuas, como utilizar toda a energia hidrelétrica nos primeiros estágios.

Esse processo continua até que todos os N_C cenários tenham sido percorridos e um corte tenha sido calculado para cada cenário. Dessa forma, ao final da iteração tem-se um número de cortes que é exatamente igual ao da PDDE Tradicional, porém como eles foram construídos um por vez é possível perceber que no início do processo iterativo os cortes da metodologia com um cenário por recursão serão de melhor qualidade quando comparado com a PDDE Tradicional.

A dificuldade dessa estratégia alternativa diz respeito à estimação do limite superior do custo total de operação, que é de fundamental importância para o critério de parada da PDDE. Isto se deve ao fato de que as políticas de cada recursão estão sendo incrementadas dentro da iteração e, com isso, tem-se que os valores de custo total de operação deixam de ser independente e identicamente distribuídos. O cálculo do limite superior (Z_{SUP}) e do desvio padrão (σ_Z) só serão representativos quando a Função de Custo Futuro for de boa qualidade, sendo de difícil avaliação ao longo do algoritmo.

A alternativa para obter o Z_{SUP} e σ_Z é ao final de cada iteração sortear um novo grupo de cenários e percorrê-los em uma única recursão progressiva, como na PDDE Tradicional. Com isso, é possível continuar calculando o valor do Z_{SUP} conforme é feito na PDDE Tradicional. Apesar de aumentar o tempo computacional, a recursão progressiva é bastante rápida e eficiente, não sendo uma desvantagem muito séria.

Destaca-se, também, que quando for utilizado processamento paralelo sugere-se utilizar uma de duas alternativas. Na primeira, ao invés de se utilizar um cenário por recursão sugere-se usar P cenários por recursão, em que P é o número de processos paralelos. Dessa forma, cada processo percorrerá um cenário por processo. Enquanto que, na

segunda, mantém um cenário por recursão e distribui-se o processamento apenas na recursão regressiva. Com isso, ao invés de resolver todos os nós descendentes em um único processo, eles são divididos entre os P processos paralelos.

Por fim, pode-se descrever o algoritmo, sem processamento paralelo, como:

Algoritmo 6: PDDE – Um cenário por recursão

1. Faça $it = 0$;
 Adicione um limite inferior para os cortes, $\alpha_{t+1} \geq 0$ para $t = 1, \dots, T-1$;
2. Sortear N_C cenários da árvore de cenários;
3. Faça de $i = 1$ a N_C

Recursão Progressiva

Faça de $t = 1$ a T

 Definir ω_t do cenário i ;

 Resolva o problema (2.38) do estágio t e realização $\xi_t^{\omega_t}$ e obtenha $x_t^{\omega_t*}$;

Fim

Recursão Regressiva

Faça de $t = T-1$ a 1

 Definir ω_t do cenário i ;

 Faça para $\omega_{t+1} \in \Delta(\omega_t)$

 Resolva o problema (2.38) do estágio $t+1$ e realização $\xi_{t+1}^{\omega_{t+1}}$ e obtenha os $\pi_{t+1}^{\omega_{t+1}*}$ e $z_{t+1}^{\omega_{t+1}*}$;

 Fim

 Com os resultados calcule o Corte (2.41) e adicione ao estágio t ;

Fim

Fim.

 Calcule Z_{SUP} (2.46) e σ_Z (2.48)

4. Testa o critério de parada (2.49). Em caso positivo, pare.
5. Faça $it = it + 1$ e vá ao passo 2.

4.5.2 Incrementando cenários por recursão

Apesar da estratégia de solução em que se percorre um cenário por recursão ser bastante eficiente no início do processo iterativo da PDDE, a eficiência diminui à medida que a qualidade da Função de Custo Futuro aumenta. Assim, (SHAPIRO *et al.*, 2011) apresentou uma abordagem alternativa que produziu melhores resultados, nos estudos realizados pelos autores, do que no caso de um cenário por recursão.

Nessa estratégia inicia-se o processo iterativo da PDDE com um cenário por recursão, porém à medida que se evolui no processo iterativo aumenta-se o número de cenários percorrido em uma recursão. Com isso, após um determinado número de iterações percorrem-se N_C cenários por recursão, da mesma forma que na PDDE Tradicional.

No caso de um cenário por recursão o primeiro cenário só recebe um corte que foi criado naquele cenário na recursão regressiva, o segundo recebe dois cortes que foram criados no cenário em questão e no anterior; esse número vai crescendo até que N_C cortes tenham sido criados. No entanto, quando se tem uma política operação de boa qualidade é mais interessante percorrer todos os cenários ao mesmo tempo, pois todos os cenários recebem na recursão regressiva todos os N_C cortes ao mesmo tempo. Com isso, todos os cenários possuem uma FCF de melhor qualidade ao longo da recursão regressiva.

Além disso, outro aspecto importante é o fato de que quando os N_C cenários são percorridos em uma única recursão é possível calcular o Z_{SUP} da mesma forma que é feito na PDDE Tradicional. Assim, nessa estratégia tem-se o benefício de iniciar o processo iterativo de uma maneira mais eficiente, porém sem perder a eficiência de forma significativa e sem comprometer o cálculo do Z_{SUP} em iterações mais avançadas, quando se tem um maior interesse em testar o critério de parada.

Por fim, pode-se descrever o algoritmo como:

Algoritmo 7: PDDE – Incrementando cenários por recursão

1. Faça $it = 0$;
 Adicione um limite inferior para os cortes, $\alpha_{t+1} \geq 0$ para $t = 1, \dots, T-1$;
2. Sortear N_C cenários da árvore de cenários. E faça $i = 0$;
3. Faça de $j = 1$ a (N_C/K)
 Faça de $k = 1$ a K
 Recursão Progressiva
 Faça de $t = 1$ a T
 Definir ω_t do cenário i ;
 Resolva o problema (2.38) do estágio t e realização $\xi_t^{\omega_t}$ e obtenha $x_t^{\omega_t*}$;
 Fim
 Recursão Regressiva
 Faça de $t = T-1$ a 1
 Definir ω_t do cenário i ;
 Faça de $\omega_{t+1} \in \Delta(\omega_t)$
 Resolva o problema (2.38) do estágio $t+1$ e realização $\xi_{t+1}^{\omega_{t+1}}$ e obtenha os $\pi_{t+1}^{\omega_{t+1}*}$ e $z_{t+1}^{\omega_{t+1}*}$;
 Fim
 Com os resultados calcule o Corte (2.41) e adicione ao estágio t ;
 Fim
 Faça $i = i + 1$;
 Fim
 Fim.
 Calcule Z_{SUP} (2.46) e σ_Z (2.48)
4. Testa o critério de parada (2.49). Em caso positivo, pare.
5. Faça $it = it + 1$, defina um novo $K \leq N_C$ e vá ao passo 2.

4.6 SELEÇÃO DE CORTES

Na PDDE, a cada iteração são criados, para cada estágio do horizonte de planejamento, tantos cortes de Benders quantos forem os cenários visitados, sendo que todos os cortes criados são mantidos ao longo de todo o processo iterativo. Dessa forma, a cada iteração o tamanho do problema de PL cresce e requer um maior tempo para encontrar a solução ótima, como consequência o tempo de

processamento da PDDE cresce rapidamente com o número de iterações.

No entanto, quando se resolve um PL nem todos os cortes são essenciais para encontrar uma solução que esteja próxima do seu valor ótimo. Assim, sugere-se selecionar uma quantidade menor de cortes para resolver cada PL e, com isso, reduzir o esforço computacional. A seleção de cortes pode ser feita de inúmeras formas, sendo que neste trabalho serão analisadas três:

- Manter os últimos C cortes;
- Nível de dominância;
- Seleção dinâmica.

Os cortes que não são selecionados pelas estratégias acima são mantidos armazenados, visto que ao final do processo iterativo pode-se considerar que todos os cortes criados fazem parte da política de operação final.

4.6.1 Manter os últimos C cortes

Essa estratégia de seleção de cortes é bastante ingênua, mas bastante simples de implementar no algoritmo da PDDE. Neste caso, em cada PL só são considerados os últimos C cortes criados.

A vantagem dessa estratégia é que o tempo computacional permanece praticamente inalterado depois que houver mais do que C cortes no conjunto total de cortes. Entretanto, a desvantagem vem do fato de que se C for muito pequeno é possível que cortes importantes não sejam considerados, enquanto que se C for muito elevado não haverá muita diferença quando comparado com a PDDE sem seleção de cortes.

Essa estratégia já foi avaliada em (SHAPIRO *et al.*, 2011), sendo que também foram analisadas alternativas como considerar também os cortes que estavam ativos nas últimas iterações, que para os estudos realizados pelos autores desempenhou melhor do que manter apenas os últimos C cortes. Entretanto, nesse trabalho, essa variação não foi considerada.

4.6.2 Nível de dominância

Essa estratégia objetiva encontrar os cortes dominantes, isto é, não selecionar os cortes que possuem custos inferiores a de outros cortes no espaço de estados e, portanto, nunca estarão ativos. No entanto,

quando a dimensão do problema (número de variáveis de estado) cresce fica inviável verificar dentro do conjunto de soluções possíveis quais são os cortes dominantes. Assim, nessa seção será apresentada uma metodologia para implementar a seleção de cortes por meio do nível de dominância.

Na PDDE os cortes são uma aproximação inferior para o custo esperado de operação para os estágios futuros, sendo assim, os cortes dominantes são aqueles que fornecem os maiores valores para o custo esperado futuro para uma dada decisão. Os cortes são calculados para estados que já foram visitados pela PDDE por serem candidatos viáveis a solução do problema.

Considere a Tabela 3, na qual cada x^c refere-se a um estado que já foi visitado na PDDE e para o qual foi calculado um corte. Abaixo, α_{ij} é definido por (4.34), no qual o índice i determina os valores que foram obtidos no estado i e o índice j define o estado para o qual será calculado o custo do corte.

$$\alpha_{ij} = \left(E \left[z^i \right] + E \left[\pi^{i^T} \right] Bx^i \right) - E \left[\pi^{i^T} \right] Bx^j \quad (4.34)$$

Tabela 3 - Definição do Nível de Dominância dos Cortes de Benders.

$k \backslash \text{Estado}$	x^1	x^2	x^3	...	x^{NC-1}	x^{NC}
1	α_{11}	α_{12}	α_{13}	...	$\alpha_{1,k-1}$	$\alpha_{1,NC}$
2	α_{21}	α_{22}	α_{23}	...	$\alpha_{2,k-1}$	$\alpha_{2,NC}$
3	α_{31}	α_{32}	α_{33}	...	$\alpha_{3,k-1}$	$\alpha_{3,NC}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
NC-1	$\alpha_{NC-1,1}$	$\alpha_{NC-1,2}$	$\alpha_{NC-1,3}$...	$\alpha_{NC-1,NC-1}$	$\alpha_{NC-1,NC}$
NC	$\alpha_{NC,1}$	$\alpha_{NC,2}$	$\alpha_{NC,3}$...	$\alpha_{NC,NC-1}$	$\alpha_{NC,NC}$

Dessa forma, os cortes dominantes são aqueles que, para pelo menos um estado x^c , o valor do corte domina os demais, isto é, o custo é maior do que nos demais. Matematicamente, tem-se que para cada j o corte dominante é dado por $i(j) = \arg \max_i \{\alpha_{ij}\}$ e é possível calcular um vetor v com os maiores valores, assim, para um dado estado j $v(j) = \max_i \{\alpha_{ij}\}$.

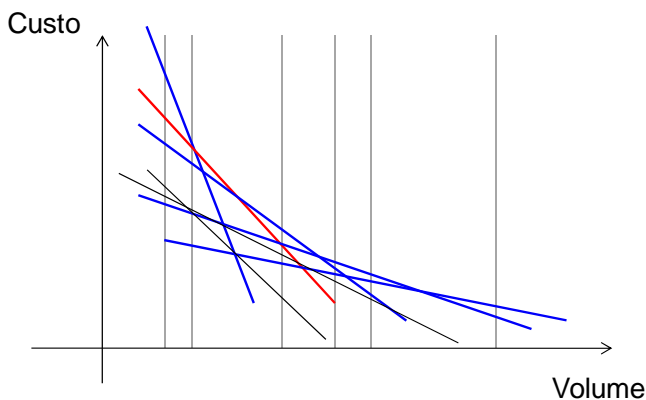
O uso dessa estratégia de seleção de cortes na PDDE pode ser feito de maneira eficiente, sem a necessidade de recalculer todos os valores a cada novo corte adicionado. Para tanto, deve-se manter a lista $i(j)$ de cortes ativos e o valor do corte $v(j)$ para cada j ; quando um novo

corte $NC+1$ for calculado deve-se então definir $i(NC+1) = \arg \max_i \{\alpha_{iNC+1}\}$ e $v(K+1) = \max_i \{\alpha_{iNC+1}\}$. Além disso, calculam-se os valores de $\alpha_{NC+1,j}$ para $j = 1, 2, \dots, K$ e quando $\alpha_{NC+1,j} > v(j)$ tem-se que $v(j) = \alpha_{NC+1,j}$ e $i(j) = NC+1$.

Entretanto, essa metodologia é uma aproximação, visto que considera apenas um número bastante limitado de estados para definir os cortes dominantes, assim uma região importante pode estar sendo ignorada em que outros cortes seriam dominantes. Como consequência, torna-se necessário flexibilizar a determinação dos cortes que serão mantidos nos problemas e, para tanto, define-se aqui o Nível de Dominância (D), que deve ser um número inteiro maior ou igual a 1. Nesse caso, ao invés de manter apenas o corte dominante, serão selecionados os D cortes mais caros para cada estado x^c . Com isso, ao invés de vetores, v e i serão matrizes de ordem $D \times NC$ em que NC é o número de cortes.

A Figura 34 ilustra um exemplo bastante simples com apenas uma dimensão, na qual os cortes destacados em azul definem o conjunto de cortes que é selecionado quando o nível de dominância é igual a 1. Por outro lado, quando o nível de dominância for 2 considera-se o corte destacado em vermelho e o conjunto de cortes selecionados pelo nível de dominância 1.

Figura 34 - Seleção de cortes por nível de dominância.



4.6.3 Seleção dinâmica

Essa estratégia de seleção de cortes foi discutida em (BRANDI, 2011), porém em um contexto um pouco diferente, no qual utiliza-se a

Programação Dinâmica Estocástica e constrói-se um função convexa linear por partes com base nos estados visitados. Assim, naquele caso a seleção é dos pontos que serão considerados para construir a função convexa, ao invés de selecionar os planos cortantes como será feito neste trabalho.

Na seleção dinâmica os cortes são selecionados à medida que são necessários. Com isso, considera-se inicialmente que todos os cortes estão inativos quando for resolver o problema de PL, com a solução obtida define-se qual corte estaria ativo para aquela solução, isto é, o corte mais caro. Adiciona-se, então, esse corte ao problema e o resolve-se o problema de PL novamente. Com a nova solução encontrada é definido e inserido ao problema o novo corte que estaria ativo. Esse processo iterativo continua até que o corte a ser adicionado já esteja ativo, ou seja, já foi inserido no problema de PL.

Vale destacar que, muitas vezes, os nós de um mesmo estágio compartilham um número significativo de cortes que deveriam estar ativos. Assim, sugere-se manter os cortes já identificados como ativos ao longo de toda a iteração, sendo que ao final da iteração todos os cortes tornam-se inativos novamente para o início da próxima iteração. Dessa forma, apesar de os nós do primeiro cenário de cada iteração não possuírem nenhum corte e requererem um processo iterativo um pouco mais longo, nos demais cenários os problemas de PLs já serão iniciados com os cortes que estão ativos naquela mesma iteração.

Alternativamente poderia ser definida uma quantidade máxima de cortes, como sugerido em (BRANDI, 2011), e adicionar cortes aos problemas de um determinado estágio até que esse número seja atingido. Quando isso acontecer, consideram-se novamente todos os cortes como inativos e reinicia-se o processo.

De maneira a facilitar a compreensão, considere o algoritmo simplificado definido na sequência.

Algoritmo 8: PDDE com Seleção Dinâmica

1. Faça $it = 0$;
2. Sortear N_C cenários da árvore de cenários;
3. Faça de $t = 1$ a T e $i = 1$ a N_C
 - Definir ω_t do cenário i ;
 - Enquanto adiciona um novo corte;
 - Resolva o problema (2.38) do estágio t e realização $\xi_t^{\omega_t}$ e obtenha $x_t^{\omega_t*}$;
 - Define o corte que estaria ativo $x_t^{\omega_t*}$;
 - Adiciona novo corte, se for necessário;
 - Fim
- Fim
4. Testa o critério de parada (2.49). Em caso positivo, pare.
5. Faça de $t = T-1$ a 1 e $i = 1$ a N_C
 - Definir ω_t do cenário i ;
 - Faça para $\omega_{t+1} \in \Delta(\omega_t)$
 - Enquanto adiciona um novo corte;
 - Resolva o problema (2.38) do estágio $t+1$ e realização $\xi_{t+1}^{\omega_{t+1}}$ e obtenha os $\pi_{t+1}^{\omega_{t+1}*}$ e $z_{t+1}^{\omega_{t+1}*}$;
 - Define o corte que estaria ativo $x_t^{\omega_t*}$;
 - Adiciona novo corte, se for necessário;
 - Fim
 - Com os resultados calcule o Corte (2.41) e adicione ao estágio t ;
 - Fim
- Fim.
6. Faça todos os cortes inativos e elimine dos problemas;
7. Faça $it = it + 1$ e vá ao passo 2.

4.7 AVERSÃO A RISCO

Conforme já foi discutido nos capítulos anteriores, no PEN tem-se por objetivo definir uma política de operação que determinará o despacho de cada termelétrica e hidrelétrica do SIN de maneira a atender a demanda ao longo do horizonte de estudo com o menor custo esperado de operação, o qual é formado pela soma dos custos das termelétricas e das penalidades financeiras.

Entretanto, apesar da política definida pelo menor custo esperado de operação ser eficiente em termos econômicos, existe uma parcela de

cenários, cauda da função densidade de probabilidade de custos, em que a decisão tomada pelo valor esperado incorre em um elevado risco de déficit de energia. Com isso, faz-se necessário definir uma metodologia alternativa que reduza o risco da falta de energia. Nesse sentido, esta seção apresentará uma formulação alternativa à que foi apresentada no Capítulo 3, na qual a política de operação será calculada de maneira a atender a demanda minimizando uma Medida Coerente de Risco (MCR). Segundo (ARTZNER *et al.*, 1999) uma função $\rho : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ é uma medida coerente de risco se ρ satisfaz os seguintes axiomas para Z_1 e $Z_2 \in \mathbf{R}^n$.

- Convexidade:

$$\rho(\beta Z_1 + (1 - \beta)Z_2) \leq \beta \rho(Z_1) + (1 - \beta)\rho(Z_2) \text{ para } \beta \in [0,1] \quad (4.35)$$

- Monotonicidade:

$$\text{Se } Z_1 \leq Z_2, \text{ então } \rho(Z_1) \leq \rho(Z_2) \quad (4.36)$$

- Homogeneidade Positiva:

$$\text{Se } U \in \mathbb{R} \text{ e } U > 0, \text{ então } \rho(UZ_1) = U\rho(Z_1) \quad (4.37)$$

- Invariância de Translação:

$$\text{Se } U \in \mathbb{R}, \text{ então } \rho(\mathbb{I}U + Z_1) = U + \rho(Z_1) \quad (4.38)$$

em que, \mathbb{I} é a matriz identidade.

A MCR escolhida para análise é uma combinação convexa entre o valor esperado e o *Conditional Value-at-Risk* (CVaR) do custo de operação. Sendo assim, o grau de aversão ao risco será definido pelos pesos dados para o valor esperado e o CVaR. Optou-se pelo CVaR pois é uma MCR que fornece controle o valor médio da cauda da FDP do custo, na qual residem os cenários com elevado risco e profundidade de falta de energia. Adicionalmente, essa combinação convexa produziu resultados consistentes em um problema similar na Nova Zelândia (PHILPOTT e DE MATOS, 2012).

Inicialmente, considere uma abordagem comum para medir o risco de uma distribuição de perdas de uma dada variável aleatória Z que é o *Value-at-Risk* para um percentil de $(1-\theta)$, $\text{VaR}_{1-\theta}[Z]$, que é definida por (ROCKAFELLAR e URYASEV, 2002) como:

$$\text{VaR}_{1-\theta}[Z] = \inf_u \{u : \Pr(Z \leq u)\} \geq 1 - \theta. \quad (4.39)$$

Em que θ é tipicamente escolhido para ser um valor de probabilidade pequeno, por exemplo, 5%. Isso significa que o $\text{VaR}_{1-\theta}[Z]$ é o $(1-\theta)$ -ésimo percentil a esquerda da distribuição de perda. No entanto, mesmo quando Z é uma função convexa de uma decisão x , não se pode garantir que a função $\text{VaR}_{1-\theta}[Z]$ seja convexa em x , o que

torna a otimização difícil de modo geral, bem como na PDDE. Uma aproximação do $\text{VaR}_{1-\theta}[Z]$, com convexidade garantida, é o *Conditional Value-at-Risk* (ROCKAFELLAR e URYASEV, 2002), e pode ser escrita como:

$$\text{CVaR}_{1-\theta}[Z] = \inf_u \{u + \theta^{-1} E[Z - u]_+\}, \quad (4.40)$$

em que se escreve $[a]_+$ para $\max\{a, 0\}$.

Neste trabalho, aborda-se uma combinação do valor esperado e do *Conditional Value-at-Risk* do custo total de operação, como sugerido por (SHAPIO, 2011). Portanto, a métrica de risco utilizada é a:

$$\rho(Z) = \sigma E[Z] + \gamma \text{CVaR}_{1-\theta}[Z]. \quad (4.41)$$

Em que os valores de σ e γ são maiores ou iguais a zero. Entretanto, na prática, faz sentido escolher um $\sigma > 0$ visto que o $\text{CVaR}_{1-\theta}[Z]$ por si só, quando $\sigma = 0$, despreza o efeito das decisões sobre os cenários mais prováveis, $(1-\theta)$, podendo resultar em políticas indesejáveis em termos de valor esperado. Assim, em alguns casos seria possível obter políticas de melhor qualidade para um mesmo nível de CVaR , θ , quando $\sigma > 0$.

A combinação em (4.41) entre valor esperado e *Conditional Value-at-Risk* é um exemplo de uma medida coerente de risco que satisfaz os três primeiros axiomas definidos por (ARTZNER *et al.*, 1999), sendo que para satisfazer o quarto (Invariância de Translação), tem-se que:

$$\begin{aligned} U + \rho(Z_1) &= \rho(\mathbb{I}U + Z_1) \\ &= \sigma E[\mathbb{I}U + Z_1] + \gamma \text{CVaR}_{1-\theta}[\mathbb{I}U + Z_1] \\ &= \sigma U + \sigma E[Z_1] + \gamma U + \gamma \text{CVaR}_{1-\theta}[Z_1] \\ &= (\sigma + \gamma)U + \sigma E[Z_1] + \gamma \text{CVaR}_{1-\theta}[Z_1] \\ &= (\sigma + \gamma)U + \rho(Z_1). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Assim $\sigma + \gamma = 1$ e, portanto, pode-se substituir σ e γ por $(1-\lambda)$ e λ respectivamente. Com isso, tem-se que a medida coerente de risco é uma combinação convexa entre o Valor Esperado e o *Conditional Value-at-Risk* e que $\lambda \in [0,1)$, conforme apresentado na sequência.

$$\rho(Z) = (1 - \lambda)E[Z] + \lambda \text{CVaR}_{1-\theta}[Z] \quad (4.43)$$

Obedecendo:

$$\rho(Z) = (1 - \lambda)E[Z] + \lambda \inf_u \{u + \theta^{-1} E[Z - u]_+\} \quad (4.44)$$

A métrica ρ foi definida até então como uma métrica de um único período (estágio), que foi estendida em (SHAPIO, 2011) para uma métrica de risco dinâmica $\rho_{t,T}$ para $t = 1, 2, 3, \dots, T$, seguindo a teoria

geral de (RUSZCZYNSKI e SHAPIRO, 2006; RUSZCZYNSKI, 2010). Assim, nas próximas seções, será utilizada o seguinte equacionamento:

$$\rho_t(Z) = (1 - \lambda_t)E[Z] + \lambda_t \inf_u \{u + \theta^{-1}E[Z - u]_+\} \quad (4.45)$$

Essa medida coerente será aplicada na PDDE de duas maneiras. Na primeira, a métrica é aplicada diretamente à formulação do problema e, com isso, tem-se uma variável de estado adicional, e na segunda, a métrica é aplicada no momento da construção dos Cortes de Benders.

4.7.1 MCR com o VaR como variável de estado

Nesta seção, é apresentada a estratégia de modelagem desenvolvida por (PHILPOTT e DE MATOS, 2012) para implementar a medida coerente de risco na PDDE. A abordagem utilizada como medida coerente de risco segue àquela discutida em (SHAPIRO, 2011; PHILPOTT e DE MATOS, 2012).

Para ajudar a compreensão de como os problemas de cada estágio são afetados pela métrica de risco, considere um problema linear de dois estágios que tem por objetivo minimizar o custo do primeiro estágio somado a métrica de risco aplicada ao custo do segundo estágio. Neste caso o primeiro estágio é determinístico e a variável aleatória do segundo estágio pertence a um conjunto Ω_2 . O processo estocástico em questão foi modelado como variáveis aleatórias somente no lado direito das restrições. Logo, o problema pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \min & c_1^\top x_1 + (1 - \lambda)E[c_2^\top x_2] + \lambda u_2 + \lambda \theta^{-1}E[c_2^\top x_2 - u_2]_+ \\ \text{s.a: } & A_1 x_1 = b_1, \\ & A_2 x_2(\omega) + B_2 x_1 = b_2(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega_2, \\ & x_1 \geq 0, x_2(\omega) \geq 0, \quad \forall \omega \in \Omega_2. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Substitui-se então $[c_2^\top x_2 - u_2]_+$ por $v_2(\omega)$ onde:

$$\begin{aligned} v_2(\omega) & \geq c_2^\top x_2(\omega) - u_2, \quad \forall \omega \in \Omega_2, \\ v_2(\omega) & \geq 0, \quad \forall \omega \in \Omega_2. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Como consequência, o novo problema de dois estágios pode ser escrito como o seguinte programa linear:

$$\begin{aligned}
& \min c_1^\top x_1 + (1-\lambda)E[c_2^\top x_2] + \lambda u_2 + \lambda \theta^{-1}E[v_2] \\
& \text{s.a: } A_1 x_1 = b_1, \\
& \quad A_2 x_2(\omega) + B_2 x_1 = b_2(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega_2, \\
& \quad v_2(\omega) \geq c_2^\top x_2(\omega) - u_2, \quad \forall \omega \in \Omega_2, \\
& \quad x_1 \geq 0, x_2(\omega) \geq 0, v_2(\omega) \geq 0, \quad \forall \omega \in \Omega_2.
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Pode-se observar (4.48) que existem duas decisões a serem tomadas no primeiro estágio, x_1 , e o nível u_2 que atinge $\inf_u \{u + \theta^{-1}E[Z - u]_+\}$. Dadas as escolhas de x_1 e u_2 , o problema do segundo estágio torna-se:

$$\begin{aligned}
& \min (1-\lambda)E[c_2^\top x_2] + \lambda \theta^{-1}E[v_2] \\
& \text{s.a: } A_2 x_2(\omega) = b_2(\omega) - B_2 x_1, \quad \forall \omega \in \Omega_2, \\
& \quad v_2(\omega) - c_2^\top x_2(\omega) \geq -u_2, \quad \forall \omega \in \Omega_2, \\
& \quad x_2(\omega) \geq 0, v_2(\omega) \geq 0, \quad \forall \omega \in \Omega_2.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Quando desacoplado por nós obtém-se:

$$\begin{aligned}
q(x_1, u_2, \omega) &= \min (1-\lambda)c_2^\top x_2 + \lambda \theta^{-1}v_2 \\
& \text{s.a: } A_2 x_2 = b_2 - B_2 x_1, \quad [\pi_2(\omega)], \\
& \quad v_2 - c_2^\top x_2 \geq -u_2, \quad [\Phi_2(\omega)], \\
& \quad x_2 \geq 0, v_2 \geq 0.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Os multiplicadores duais são mostrados entre colchetes à direita. Pelo teorema da dualidade forte, a solução ótima satisfaz:

$$q(x_1, u_2, \omega) = \pi_2(\omega)^\top (b_2 - B_2 x_1) - \Phi_2(\omega)u_2 \tag{4.51}$$

Assim, o problema (4.48) pode agora ser representado por:

$$\begin{aligned}
& \min c_1^\top x_1 + \lambda u_2 + E[q(x_1, u_2, \omega)] \\
& \text{s.a. } A_1 x_1 = b_1, \\
& \quad x_1 \geq 0.
\end{aligned} \tag{4.52}$$

A decomposição de Benders pode ser usada para calcular a solução do problema (4.48), que é dado por:

$$\begin{aligned}
& \min c_1^\top x_1 + \lambda u_2 + \alpha_2 \\
& \text{s.a. } A_1 x_1 = b_1, \\
& \quad \alpha_2 + \overline{\pi_{2c}^\top} E_2 x_1 + \overline{\Phi_{2c}} u_{2c} \geq g_{2c}, \quad c = 1, 2, \dots, NC, \\
& \quad x_1 \geq 0.
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Em que NC é o total de cortes que foram adicionados ao problema de primeiro estágio, e:

$$\begin{aligned}\bar{\pi}_{2c} &= E[\pi_{2k}], \\ \bar{\Phi}_{2c} &= E[\Phi_{2k}], \\ g_{2c} &= E[q_2(x_{1c}^*, u_{2c}^*)] + \bar{\pi}_{2c} B_2 x_{1c}^* + \bar{\Phi}_{2k} u_{2c}^*.\end{aligned}\tag{4.54}$$

Pode-se generalizar este método a um problema de T estágios, que é ilustrado a seguir para um problema de três estágios. Nesse caso, o problema pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}\min c_1^\top x_1 + (1 - \lambda_2) E \left[\begin{aligned} &c_2^\top x_2 + (1 - \lambda_3) E[c_3^\top x_3] + \lambda_3 u_3 \\ &+ \lambda_3 \theta_3^{-1} E[c_3^\top x_3 - u_3]_+ \end{aligned} \right] + \lambda_2 u_2 \\ + \lambda_2 \theta_2^{-1} E \left[\begin{aligned} &c_2^\top x_2 + \lambda_3 u_3 + (1 - \lambda_3) E[c_3^\top x_3] + \lambda_3 u_3 \\ &+ \lambda_3 \theta_3^{-1} E[c_3^\top x_3 - u_3]_+ - u_2 \end{aligned} \right]_+ \\ \text{s.a: } A_1 x_1 = b_1,\end{aligned}\tag{4.55}$$

$$\begin{aligned}A_2 x_2(\omega_2) + B_2 x_1 &= b_2(\omega_2), & \forall \omega_2 \in \Omega_2, \\ A_3 x_3(\omega_3) + B_3 x_2(a(\omega_3)) &= b_3(\omega_3), & \forall \omega_3 \in \Omega_3, \\ x_1 \geq 0, x_2(\omega_2) &\geq 0, & \forall \omega_2 \in \Omega_2, \\ x_3(\omega_3) &\geq 0, & \forall \omega_3 \in \Omega_3.\end{aligned}$$

Em que $a(\omega_i)$ corresponde ao nó antecessor de ω_i . O último estágio (terceiro) pode ser desacoplado do problema anterior e por nós, para ser representado como:

$$\begin{aligned}q_3(x_2, u_3, \omega_3) &= \min(1 - \lambda_3) c_3^\top x_3 + \lambda_3 \theta_3^{-1} v_3 \\ \text{s.a: } A_3 x_3 &= b_3 - B_3 x_2, & [\pi_3], \\ v_3 - c_3^\top x_3 &\geq -u_3, & [\Phi_3], \\ x_3 \geq 0, v_3 &\geq 0.\end{aligned}\tag{4.56}$$

Assumindo que $q_3(x_2, u_3) = E[q_3(x_2, u_3, \omega_3)]$ e substituindo-o em (4.55), pode-se escrever o problema (4.55) como:

$$\begin{aligned}\min c_1^\top x_1 + (1 - \lambda_2) E \left[\begin{aligned} &c_2^\top x_2 + \lambda_3 u_3 + q_3(x_2, u_3) \\ &+ \lambda_2 \theta_2^{-1} E \left[c_2^\top x_2 + \lambda_3 u_3 + q_3(x_2, u_3) - u_2 \right]_+ \end{aligned} \right] + \lambda_2 u_2 \\ \text{s.a: } A_1 x_1 = b_1, \\ A_2 x_2(\omega_2) + B_2 x_1 &= b_2(\omega_2), & \forall \omega_2 \in \Omega_2, \\ x_1 \geq 0, x_2(\omega_2) &\geq 0, & \forall \omega_2 \in \Omega_2.\end{aligned}\tag{4.57}$$

Considerando que $v_2(\omega_2)$ seja dado por:

$$\begin{aligned} v_2(\omega_2) &\geq c_2^\top x_2 + \lambda_3 u_3 + q_3(x_2, u_3) - u_2, & \forall \omega_2 \in \Omega_2, \\ v_2(\omega_2) &\geq 0, & \forall \omega_2 \in \Omega_2. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Ao substituir (4.58) em (4.57) tem-se o novo problema de dois estágios pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \min & c_1^\top x_1 + (1 - \lambda_2)E[c_2^\top x_2 + \lambda_3 u_3 + q_3(x_2, u_2)] \\ & + \lambda_2 u_2 + \lambda_2 \theta_2^{-1} E[v_2] \\ \text{s.a: } & A_1 x_1 = b_1, \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$A_2 x_2(\omega_2) + B_2 x_1 = b_2(\omega_2), \quad \forall \omega_2 \in \Omega_2,$$

$$v_2(\omega_2) \leq c_2^\top x_2 + \lambda_3 u_3 + q_3(x_2, u_3) - u_2, \quad \forall \omega_2 \in \Omega_2,$$

$$x_1 \geq 0, x_2(\omega_2) \geq 0, v_2(\omega_2) \geq 0, \quad \forall \omega_2 \in \Omega_2.$$

Dadas escolhas de x_1 e u_2 , o problema (4.59) torna-se:

$$\begin{aligned} \min & (1 - \lambda_2)E[c_2^\top x_2 + \lambda_3 u_3 + q_3(x_2, u_2)] + \lambda_2 \theta_2^{-1} E[v_2] \\ \text{s.a: } & A_2 x_2(\omega_2) + B_2 x_1 = b_2(\omega_2), \quad \forall \omega_2 \in \Omega_2, \\ & v_2(\omega_2) \leq c_2^\top x_2 + \lambda_3 u_3 + Q_3(x_2, u_3) - u_2, \quad \forall \omega_2 \in \Omega_2, \\ & x_2(\omega_2) \geq 0, v_2(\omega_2) \geq 0, \quad \forall \omega_2 \in \Omega_2. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Desacoplado por nós e considerando que se $q_3(x_2, u_3)$ pode ser representado pelos cortes NC_3 , obtém-se:

$$\begin{aligned} q_2(x_1, u_2, \omega_2) &= \min(1 - \lambda_2)(c_2^\top x_2 + \lambda_3 u_3 + \alpha_3) + \lambda_2 \theta_2^{-1} v_2 \\ \text{s.a: } & A_2 x_2 = b_2 - B_2 x_1, \quad [\pi_2], \\ & v_2 - c_2^\top x_2 - \lambda_3 u_3 - \alpha_3 \geq -u_2, \quad [\Phi_2] \\ & \alpha_3 + \bar{\pi}_{3c}^\top E_3 x_2 + \bar{\Phi}_{3c} u_3 \geq g_{3c}, \quad c = 1, 2, \dots, NC_3, \\ & x_2 \geq 0, v_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Em geral, o t -ésimo estágio pode ser representado por:

$$\begin{aligned} q_t(x_{t-1}, u_t, \omega_t) &= \min(1 - \lambda_t)(c_t^\top x_t + \lambda_{t+1} u_{t+1} + \alpha_{t+1}) + \lambda_t \theta_t^{-1} v_t \\ \text{s.a: } & A_t x_t = b_t - B_t x_{t-1}, \quad [\pi_t], \\ & v_t - c_t^\top x_t - \lambda_{t+1} u_{t+1} - \alpha_{t+1} \geq -u_t, \quad [\Phi_t] \\ & \alpha_{t+1} + \bar{\pi}_{t+1,c}^\top E_{t+1} x_t + \bar{\Phi}_{t+1,c} u_{t+1} \geq g_{t+1,c}, \\ & x_t \geq 0, v_t \geq 0. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Em que c é o índice de cortes que são adicionados ao problema principal de Benders do t -ésimo estágio, e:

$$\begin{aligned}
\bar{\pi}_{t+1,c} &= E[\pi_{t+1,c}], \\
\bar{\Phi}_{t+1,c} &= E[\Phi_{t+1,c}], \\
g_{t+1,c} &= E[q_{t+1}(x_{tc}^*, u_{t+1,c}^*)] + \bar{\pi}_{t+1,c} B_{t+1} x_{tc}^* + \bar{\Phi}_{t+1,c} u_{t+1,c}^*.
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Dado que o modelo em cada estágio é um problema de programação linear com a incerteza aparecendo do lado direito da equação, é possível aplicar a forma padrão do algoritmo da PDDE para resolver o modelo de aversão a risco. Além disso, o mesmo satisfaz todas as condições em (PHILPOTT e GUAN, 2008), e assim converge com probabilidade 1 para a política ótima, com algumas condições no processo de amostragem, por exemplo, independência.

Uma dificuldade prática é de se obter estimações confiáveis do limite superior do custo total de operação de uma política ótima. A configuração multiestágio com CVaR necessita de um processo de amostragem condicional para estimar o custo de qualquer política, o que seria proibitivamente caro em termos computacionais para problemas com muitos estágios.

A ausência de um bom estimador para o limite superior torna difícil a verificação do critério de parada do método. Uma abordagem possível seria parar o algoritmo caso o limite inferior não mudasse significativamente por algumas iterações, mas isso não garante que a política seja de boa qualidade, mesmo quando se está interessado somente nas decisões do primeiro estágio. A abordagem a ser utilizada nas próximas seções é a de rodar o algoritmo até um número máximo de iterações suficientemente elevado.

4.7.2 MCR com Mudança na Distribuição de Probabilidade

Nesta seção será discutida outra abordagem para implementar a MCR na PDDE que foi discutida por (SHAPIRO *et al.*, 2012), que nesse caso não exige a necessidade de adicionar uma variável de estado e, ademais, tem outras vantagens frente a metodologia anterior. Essas vantagens serão destacadas ao longo deste tópico.

Nessa abordagem, ao invés de adicionar a modelagem da MCR diretamente, a aplicação da MCR será feita por uma mudança da distribuição de probabilidade no momento da construção do corte. Apesar de a metodologia ser generalizada para outras MCRs, iremos considerar nesse caso a combinação convexa entre o valor esperado e o CVaR.

Assim, considere o problema de dois estágios (4.46), o qual terá o problema de segundo estágio decomposto por nó da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} q_2(x_1, \omega_2) = \min c_2^\top x_2 \\ \text{s.a: } A_2 x_2 = b_2 - B_2 x_1, \quad [\pi_2], \\ x_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Com isso, o problema de primeiro estágio é definido por:

$$\begin{aligned} \min c_1^\top x_1 + \rho(q_2(x_1, \omega_2)) \\ \text{s.a. } A_1 x_1 = b_1, \\ x_1 \geq 0. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Nesse caso está sendo considerada uma medida $\rho(q_2(x_1, \omega_2))$ que atende aos axiomas definidos por (ARTZNER *et al.*, 1999) e, portanto, é uma função convexa. Consequentemente, é possível construir iterativamente uma aproximação inferior de $\rho(q_2(x_1, \omega_2))$, que ao longo deste documento foi denominada de Função de Custo Futuro. Até o momento, as construções dos cortes de Benders utilizam os valores médios dos multiplicadores de Lagrange e dos custos operativos para calcular a aproximação a ser adicionada ao estágio anterior. Entretanto, ao recordar a equação (2.33), verifica-se que todo o desenvolvimento feito no decorrer deste documento permite cada realização ter uma probabilidade associada diferente.

Como já foi discutido, a PDDE tem duas recursões: a primeira, que é a recursão progressiva, na qual são definidos os estados para os quais serão calculados os cortes e a segunda, que é a recursão regressiva, que calcula os cortes propriamente ditos. Assim, considere que foi definido um estado x_1^0 para o qual todas as realizações do segundo estágio foram resolvidos os problemas (4.64). Com isso, tem-se que:

$$\rho(q_2(x_1^0, \omega_2)) = (1 - \lambda)E[q_2(x_1^0, \omega_2)] + \lambda CVaR_{1-\theta}[q_2(x_1^0, \omega_2)]. \quad (4.66)$$

Neste momento já se conhece todas as decisões e, portanto, os custos de segundo estágio, $q_2(x_1^0, \omega_2)$, dado um estado inicial x_1^0 . Como consequência, para esse dado conjunto de decisões é possível determinar o valor do VaR para um percentil θ e como resultado, pode-se reescrever (4.66) como:

$$\rho(q_2(x_1^0, \omega_2)) = (1 - \lambda) \sum_{\omega_2 \in \Omega_2} p^{\omega_2} q_2(x_1^0, \omega_2) + \lambda \sum_{\omega_2 \in \Omega_2} h^{\omega_2} q_2(x_1^0, \omega_2). \quad (4.67)$$

Em que, p^{ω_2} é a probabilidade associada à realização ω_2 e h^{ω_2} é dado pela seguinte regra:

$$\begin{aligned}
 h^{\omega_2} &= 0, & q_2(x_1^0, \omega_2) &< \text{VaR}_{1-\theta}, \\
 h^{\omega_2} &= \frac{p^{\omega_2}}{\sum_{\omega_2 \in \Omega_2} p^{\omega_2} \mid h^{\omega_2} \neq 0}, & q_2(x_1^0, \omega_2) &\geq \text{VaR}_{1-\theta}.
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

Com isso, tem-se que

$$\begin{aligned}
 \rho(q_2(x_1^0, \omega_2)) &= \sum_{\omega \in \Omega} \left[(1-\lambda)p^{\omega_2} + \lambda h^{\omega_2} \right] q_2(x_1^0, \omega_2) \\
 \rho(q_2(x_1^0, \omega_2)) &= \sum_{\omega \in \Omega} v^{\omega_2} q_2(x_1^0, \omega_2).
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

Consequentemente tem-se que o problema aproximado do primeiro estágio é dado por

$$\begin{aligned}
 &\min c_1^\top x_1 + \alpha_2 \\
 &\text{s.a: } A_1 x_1 = b_1, \\
 &\quad \alpha_2 + \pi_{2c}^\top B_2 x_1 \geq g_{2c}, \quad c = 1, 2, \dots, NC, \\
 &\quad x_1 \geq 0.
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

De forma que

$$\begin{aligned}
 \bar{\pi}_{2c} &= \sum_{\omega_2 \in \Omega_2} v^{\omega} \pi_{2c}, \\
 g_{2c} &= \sum_{\omega_2 \in \Omega_2} v^{\omega} q_2(x_{1c}^*, \omega_2) + \bar{\pi}_{2c} B_2 x_{1c}^*.
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

Assim, é possível aplicar a medida coerente de risco sem muitas alterações na PDDE clássica neutra a risco e a formulação do PEN se mantém a mesma que foi apresentada na Seção 3.3. A diferença fica no cálculo dos cortes de Benders, para os quais são redefinidas as probabilidades de acordo com as decisões tomadas.

A grande vantagem dessa abordagem é o fato de não requerer a utilização de uma variável de estado adicional e mudanças significativas na modelagem do problema. Como resultado, os multiplicadores de Lagrange mantêm as informações referentes ao problema original, este fato é de fundamental importância no estudo do PEN, uma vez que o Custo Marginal de Operação (CMO) é dado pelo multiplicador de Lagrange das restrições de atendimento a demanda. O CMO tem extrema importância no estudo do PEN e não poderia ser obtido diretamente do problema no caso da metodologia discutida na Seção 4.7.1.

A abordagem apresentada para dois estágios pode ser extrapolada para o caso de T estágios, sendo que nesse caso o problema para uma dada realização do cenário ω_t no estágio t é dado por:

$$\begin{aligned} q_t(x_{t-1}, \omega_t) = \min c_t^\top x_t + \alpha_{t+1} \\ \text{s.a: } A_t x_t = b_t - B_t x_{t-1}, \quad [\pi_t], \\ \alpha_{t+1} + \pi_{t+1,c}^\top B_{t+1} x_t \geq g_{t+1,c}, \quad c = 1, 2, \dots, NC_{t+1}, \\ x_t \geq 0. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Em que,

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_{t+1,c} &= \sum_{\omega_{t+1} \in \Delta(\omega_{t+1})} v_{t+1}^{\omega_{t+1}} \pi_{t+1,c}, \\ g_{t+1,c} &= \sum_{\omega_{t+1} \in \Delta(\omega_{t+1})} v_{t+1}^{\omega_{t+1}} q_{t+1}(x_{tc}^*, \omega_{t+1}) + \bar{\pi}_{t+1,c} B_{t+1} x_{tc}^*. \end{aligned} \quad (4.73)$$

4.8 CONCLUSÃO

Neste capítulo foram apresentadas as principais contribuições deste trabalho, que tiveram sete focos principais: a modelagem do PEN, o critério de parada, técnicas de amostragem alternativas, avaliação da qualidade da política de operação, estratégias de solução da PDDE, seleção de cortes e metodologia de aversão a risco.

Na modelagem do PEN foram discutidas sugestões de solução para contornar os aspectos problemáticos apresentados no capítulo anterior, sendo que a qualidade dessas soluções será analisada no capítulo seguinte. Além disso, discutiu-se o uso de um nó fantasma para considerar o primeiro estágio estocástico, uma vez que as decisões são tomadas no início do mês e não se pode prever com exatidão a Energia Afluente que ocorrerá no primeiro estágio. Adicionalmente, foi apresentada a introdução de uma nova variável de folga na modelagem que garante que o problema será de recurso relativamente completo, requisito necessário para as principais estratégias de solução de problemas de otimização estocástica.

Na sequência foi discutido o critério de parada proposto por (PEREIRA e PINTO, 1991), que segundo a teoria de Teste de Hipótese não tem argumentos muito fortes para avaliar se o algoritmo da PDDE deve ser finalizado. Dessa forma, propuseram-se duas alternativas, a primeira é muito conservadora e pode não ser atingida em momento algum. Por outro lado, a segunda tem um teste de hipótese equivalente ao atual e adiciona um novo critério, que mede o nível do erro Tipo II.

Conforme comentado ao longo deste documento, uma das etapas mais importantes do processo de otimização estocástica é o sorteio da árvore de cenários. Nesse sentido, este capítulo apresentou o Quasi Monte Carlo Aleatório e o Latin Hypercube Sampling, que são técnicas de amostragem que buscam reduzir a variância do estimador por meio de um sorteio mais inteligente. Com isso, espera-se reduzir o tamanho do problema e manter uma boa qualidade na política de operação.

Na sequência, destacou-se a avaliação da qualidade da política de operação, que se torna muito onerosa computacionalmente para o PEN no caso em que o cálculo do limite inferior é realizado conforme o Algoritmo 4. Dessa forma, Morton (2009) propôs uma estratégia alternativa que foi apresentada neste capítulo, cujo resultado será analisado em um estudo de caso do PEN no próximo capítulo.

Novas estratégias de solução da PDDE, bem como metodologias para seleção de cortes foram apresentadas de maneira a reduzir o tempo de processamento para encontrar políticas de boa qualidade. A redução do tempo computacional pode viabilizar, também, a utilização de modelagens mais detalhadas e árvore de cenários de melhor qualidade.

Por fim, foi discutida a inclusão de uma metodologia de aversão a risco com base em uma medida coerente de risco, que é formada pela combinação convexa entre o valor esperado e o CVaR. Essa metodologia permite construir políticas operativas que não apenas minimizem o custo esperado de operação, mas, também, que protejam o sistema de cenários críticos com baixa afluência e elevado risco de déficit.

5. RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos com modelo de otimização estocástica desenvolvido neste trabalho, utilizando a formulação e metodologias propostas nos capítulos anteriores. Os estudos são feitos com base em dois conjuntos de dados, referente aos meses de Janeiro de 2009 e Janeiro de 2012. No primeiro conjunto são feitas as validações da implementação e a análise da inclusão do nó fantasma. No segundo, as análises focam no modelo com aversão a risco, nas estratégias para melhorar o desempenho da PDDE e na avaliação da política operativa.

Dessa forma, inicialmente será descrito o sistema hidrotérmico referente a Janeiro de 2009, bem como os principais dados usados nos respectivos estudos de casos. Em seguida, serão apresentadas as configurações dos estudos de casos com seus resultados e análises. Da mesma forma, na sequência apresentam-se os dados de Janeiro de 2012, com seus respectivos estudos de casos e análises.

Nos estudos de com o conjunto de dados de Janeiro/2009, os resultados foram obtidos em computadores com a seguinte configuração, 1 processador Intel Extreme X9650 3,00 GHz, 4 GB RAM e Windows XP 64Bits. Para resolver cada problema de PL foi utilizado o pacote computacional ILOG CPLEX 11. Enquanto que os estudos o conjunto de dados de Janeiro/2009, os resultados foram obtidos em computadores com a seguinte configuração, 2 processadores Intel Xeon X5690 3,46 GHz, 32 GB RAM 1333MHz, disco de alta performance 300 GB SAS 15000 rpm e Windows Server 2008 R2 Standard Edition. Para resolver cada problema de PL foi utilizado o pacote computacional Gurobi 4.61.

5.1 SISTEMA HIDROTÉRMICO – JANEIRO/2009

Os resultados apresentados na próxima seção foram obtidos considerando todo o Sistema Interligado Nacional (SIN), para as condições de armazenamento ao final de Dezembro de 2008. Os dados referentes às usinas foram retirados integralmente do conjunto de arquivos utilizado pelo modelo NEWAVE para realizar os estudos energéticos de Janeiro de 2009, que está disponível no site da CCEE.

O modelo desenvolvido também considera as expansões das usinas hidrelétricas (UHES) e termelétricas (UTES), assim como as alterações em alguns dos parâmetros das usinas. O fato de haver

expansões e modificações importantes nas UHEs torna necessário o uso de várias configurações hidrelétricas para os REEs, conforme discutido no Capítulo 3.

Para este estudo, o SIN foi dividido em 4 subsistemas elétricos, de acordo com a classificação adotada nos estudos energéticos no Brasil: Sudeste/Centro-Oeste (SE/CO), Sul (S), Nordeste (NE) e Norte (N). A Figura 35 ilustra a posição geográfica de cada subsistema, bem como a configuração de intercâmbios.

Figura 35 - Posição geográfica dos subsistemas e configuração dos intercâmbios.



Para o presente estudo, o sistema é composto por 139 usinas hidrelétricas e 146 usinas termelétricas, desconsiderando as usinas de pequeno porte, isto é, aquelas com capacidade de produção menor que 30MW. As usinas estão distribuídas nos subsistemas segundo apresentado na Tabela 4, na qual se destaca que a maior parte das usinas se concentra no subsistema SE/CO.

Tabela 4 - Distribuição de UHEs e UTEs nos subsistemas.

Subsistema	Número de UHE	Número de UTE
SE/CO	99	54

S	30	24
NE	7	65
N	3	3
Total	139	146

Algumas UHEs foram agregadas em uma única usina equivalente na base de dados do NEWAVE, conforme é o caso das usinas do complexo de Paulo Afonso e Moxotó, visto que a usina de Itaparica tem ambas imediatamente a jusante, dificultando a representação de maneira adequada da distribuição da água turbinada/vertida por esta usina no modelo a REE.

Na sequência, são apresentadas apenas as principais características do sistema para o primeiro mês ou primeiro ano de estudo. Os demais dados podem ser obtidos no conjunto de arquivos disponibilizados pela CCEE. A Tabela 5 ilustra os limites de intercâmbios entre os subsistemas para Janeiro/2009, na qual ressalta-se que o Subsistema Imperatriz é utilizado apenas como nó de conexão entre os subsistemas SE/CO, N e NE – conforme Figura 35.

Tabela 5 - Limites de intercâmbios (MWmédio) entre os subsistemas para Janeiro/2009.

		Destino				
		SE/CO	SU	NE	N	Imperatriz
Origem	SE/CO		4.782	710	-	2.778
	SU	5.287		-	-	-
	NE	200	-		-	1.827
	N	-	-	-		3.943
	Imperatriz	3.085	-	3.132	2.757	

A demanda de cada subsistema é apresentada na Tabela 6, enquanto que os patamares de déficit e o custo de cada patamar de déficit para Janeiro/2009 são ilustrados pela Tabela 7. O percentual da profundidade de cada patamar do déficit é relativo à demanda do subsistema em cada estágio em estudo.

Tabela 6 - Demanda de energia (MWmédio) dos subsistemas.

Mês	Subsistema			
	SE/CO	S	NE	N
Janeiro/2009	33.952	9.283	8.014	3.912
Fevereiro/2009	34.857	9.941	7.966	3.903
Março/2009	35.257	9.589	7.984	3.893
Abril/2009	34.643	9.178	7.913	3.892

Maio/2009	34.368	8.948	7.785	3.958
Junho/2009	34.206	8.933	7.643	3.963
Julho/2009	34.252	8.870	7.662	3.932
Agosto/2009	34.708	8.822	7.751	3.971
Setembro/2009	34.860	8.732	7.925	3.982
Outubro/2009	35.047	8.781	8.104	3.968
Novembro/2009	34.635	8.871	8.127	3.956
Dezembro/2009	34.091	9.007	9.097	3.921

Tabela 7 - Profundidade e custo dos patamares de déficit para cada subsistema para Janeiro/2009.

	Profundidade (%)				Custo (R\$/MWh)			
	1	2	3	4	1	2	3	4
SE/CO	5	5	10	80	1050,27	2265,76	4734,74	5380,48
S	5	5	10	80	1050,27	2265,76	4734,74	5380,48
NE	5	5	10	80	1050,27	2265,76	4734,74	5380,48
N	5	5	10	80	1050,27	2265,76	4734,74	5380,48

A demanda de cada subsistema foi dividida em três patamares de carga: leve, média e pesada. Assim, os parâmetros dos patamares de carga para Janeiro/2009 são apresentados na Tabela 8.

Tabela 8 - Parâmetros dos patamares de carga para Janeiro/2009.

Característica	SE/CO	S	NE	N
Fator de Carregamento Leve	0,8602	0,8431	0,9096	0,9620
Fator de Carregamento Médio	1,0744	1,0989	1,0395	1,0125
Fator de Carregamento Pesado	1,1253	1,0643	1,1239	1,0727
Fator de Patamar Leve	0,3724	0,3724	0,3724	0,3724
Fator de Patamar Médio	0,5228	0,5228	0,5228	0,5228
Fator de Patamar Pesado	0,1048	0,1048	0,1048	0,1048

A geração de pequenas usinas para Janeiro de 2009, em MWmédio, foi de 1533, 484, 174 e 34 para os subsistemas SE/CO, S, NE e N, respectivamente. Por fim, considerou-se que as Energias Afluentes dos meses anteriores ao estudo são dadas pelos valores da Tabela 9.

Tabela 9 - Energia afluentes (MWmês) dos meses anteriores ao início do estudo.

Mês	Subsistema			
	SE/CO	S	NE	N

Dezembro/2008	37.395	4.498	7.490	4.241
Novembro/2008	25.143	16.391	2.598	1.359
Outubro/2008	20.307	18.161	2.198	922
Setembro/2008	15.683	6.641	2.108	922
Agosto/2008	22.213	7.691	2.447	1.220
Julho/2008	20.405	5.568	2.896	1.868
Junho/2008	27.044	8.184	3.415	3.627
Mai/2008	34.919	8.374	6.053	9.982
Abril/2008	50.075	4.858	14.459	14.521
Março/2008	60.864	3.580	13.218	12.350
Fevereiro/2008	60.781	4.128	11.385	8.289
Janeiro/2008	36.321	6.164	5.479	3.802

5.2 ESTUDOS DE CASOS – JANEIRO/2009

Com o intuito de facilitar o acompanhamento dos resultados, os estudos de casos serão divididos em duas análises. Na primeira, serão apresentados os resultados para um problema pequeno, no qual é possível enumerar todos os cenários da árvore e, com isso, validar a implementação computacional. Além disso, nessa análise, serão apresentados os aspectos problemáticos relacionados à modelagem não linear no PEN, que foram discutidas no Capítulo 3, bem como os resultados das soluções propostas no Capítulo 4. Na segunda análise é feita a validação da implementação com a adição do nó fantasma, apresentada na Subseção 4.1.3, em que se considera o primeiro estágio estocástico.

5.2.1 Validação do Modelo e Análise das não-linearidades

Conforme comentado, neste ponto serão estudados os resultados para um horizonte pequeno, com seis estágios, e duas realizações de ENA em cada estágio, sendo que o primeiro estágio será considerado determinístico. Naturalmente que esta árvore de cenários não é suficiente para gerar uma boa política de operação; porém, ela nos permite enumerar todos os 32 cenários e resolvê-los utilizando a PDDE. Ao garantir a enumeração de todos os cenários nas recursões progressiva e regressiva, os custos superior (Z_{SUP}) e inferior (Z_{INF}) devem ser iguais quando a PDDE atingir a convergência. Isto porque nesse caso a PDDE resolve a árvore completa tal como a Decomposição Aninhada (BIRGE e LOUVEAUX, 1997).

A ENA da árvore de cenários foi gerada pelos três modelos apresentados neste documento: (i) sorteio independente (4.1.2.2); (ii) Modelo ARP(p) Atual (3.2.4) e (iii) Modelo ARP(p) Modificado com o Λ^{MAX} (4.1.2.1). Além disso, os atributos do REE serão modelados com funções lineares e quadráticas. A perda de Energia Fio d'Água Bruta, yp , não será considerada em nenhum dos casos desta seção e a correção da Energia Controlável, fc , será considerada apenas em alguns casos. A Tabela 10 resume os casos com as respectivas configurações, que são as combinações de todas as possibilidades descritas nesse parágrafo.

Tabela 10 - Estudo de casos para Validação do Modelo e Análise das Não-Linearidades.

Caso	Modelo de Energia Afluente	Modelo REE	fc	Estratégia de Solução
0	Independente	Linear	Sem	PL único
1	Independente	Linear	Sem	PDDE
2	ARP(p) Atual	Linear	Com	PDDE
3	ARP(p) Atual	Quadrático	Com	PDDE
4	ARP(p) Modificado	Linear	Com	PDDE
5	ARP(p) Modificado	Quadrático	Com	PDDE
6	ARP(p) Modificado	Linear	Sem	PDDE
7	ARP(p) Modificado	Quadrático	Sem	PDDE
8	Independente	Linear	Com	PDDE
9	Independente	Quadrático	Com	PDDE

Nestes estudos são apresentados os resultados dos 10 casos acima para 10 sementes diferentes, que produzem 10 árvores de cenários distintas. Esta estratégia busca fornecer resultados mais consistentes, visto que os casos são de pequeno porte e pouco representativos. Devido ao curto horizonte de estudo, os volumes iniciais das UHEs foram considerados nulos. Além disso, destaca-se que o critério de parada da PDDE foi o número máximo de iterações, sendo que nos casos de 1 a 9 permitiu-se a PDDE processar 75 iterações.

Conforme comentado, em todos os casos resolve-se a árvore completa e, por isso, o Z_{SUP} e Z_{INF} devem ser aproximadamente iguais na última iteração, ou seja, na 75ª iteração. Por esta razão, para facilitar a compreensão dos resultados, os gráficos apresentados nesta seção ilustrarão a diferença entre o Z_{SUP} e Z_{INF} na última iteração.

Inicialmente, é fundamental validar o modelo desenvolvido para garantir que os resultados obtidos nas análises seguintes sejam confiáveis. Para tanto, comparou-se os casos 0 e 1, conforme pode ser

observado na Figura 36. No Caso 0, foi construído um PL único contendo todos os nós da árvore de cenários, que foi solucionado usando o ILOG CPLEX 11. Com isso, tem-se uma referência para avaliar se o modelo está produzindo resultados compatíveis. Assim, no Caso 1 manteve-se exatamente a mesma configuração do Caso 0. A Figura 36 apresenta a diferença entre o custo ótimo do Caso 0 e o Z_{SUP} do Caso 1, na qual se verifica que a diferença da ordem de 10^{-3} é pequena comparada com o custo total de operação que é da ordem de 10^6 . Além disso, a Figura 37 ilustra a diferença entre o Z_{INF} e Z_{SUP} no Caso 1, que para todas as sementes pode ser considerada zero dado a ordem de grandeza dos custos. Dessa forma, pode-se considerar que o algoritmo está funcionando de maneira apropriada.

Figura 36 - Comparação entre os Casos 0 e 1.

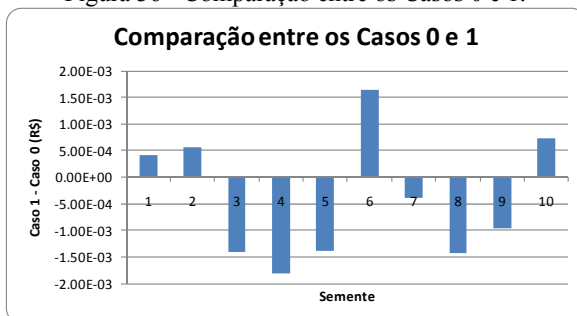
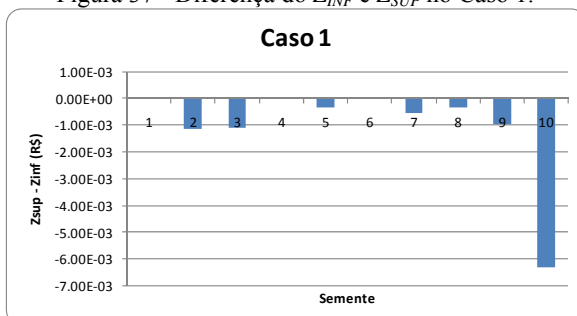


Figura 37 - Diferença do Z_{INF} e Z_{SUP} no Caso 1.



Na sequência da validação do modelo, busca-se analisar as consequências das não linearidades do PEN nas soluções obtidas usando a PDDE. Para tanto, considerou-se o modelo $ARP(p)$ Atual, que é o modelo não linear, e o REE com aproximações linear e quadrática nos casos 2 e 3, respectivamente. A Figura 38 apresenta o Caso 2, enquanto

a Figura 39 ilustra o Caso 3. Embora a diferença entre o Z_{INF} e Z_{SUP} é maior no Caso 2 do que no Caso 3, em ambos os casos a diferença é muito mais significativa do que no Caso 1. Ainda, destaca-se que em todas as sementes o Z_{INF} tornou-se significativamente maior que o Z_{SUP} . Isto indica que em ambos os casos a PDDE está produzindo resultados insatisfatórios

Figura 38 - Diferença do Z_{INF} e Z_{SUP} no Caso 2.

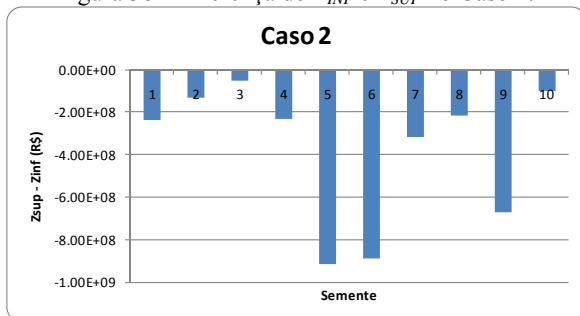
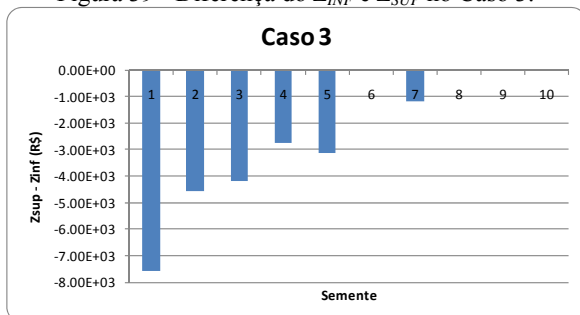
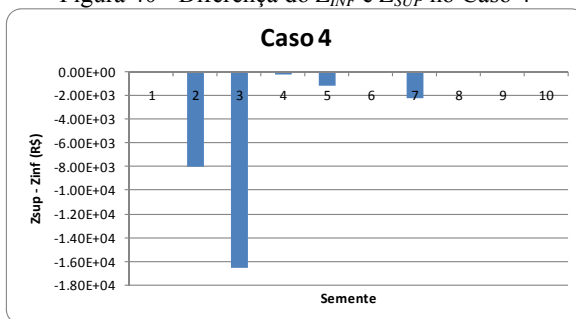
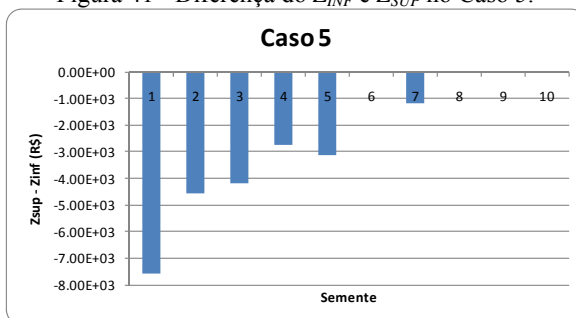


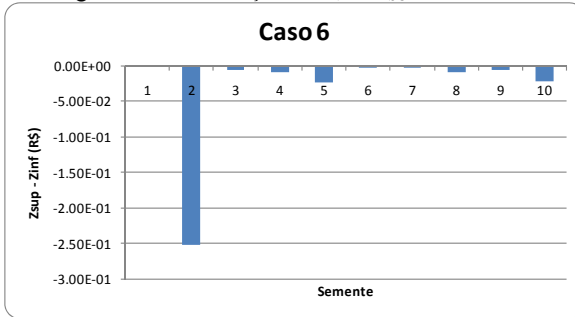
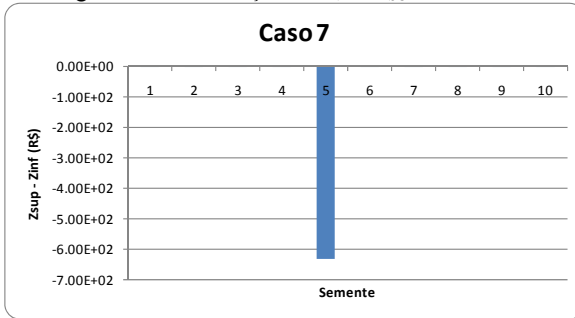
Figura 39 - Diferença do Z_{INF} e Z_{SUP} no Caso 3.



Conforme pode ser observado nas figuras anteriores, a política de operação (i.e. as aproximações do custo futuro construídas na PDDE) é inadequada. Porém, como o modelo já foi validado ao estudar os casos 0 e 1, faz-se necessário avaliar as outras alternativas de modelagens apresentadas no Capítulo 4. Nesse sentido, foi considerado o modelo $ARP(p)$ Modificado, que é o modelo que utiliza o Λ^{MAX} , com aproximações lineares e quadráticas no REE para os casos 4 (Figura 40) e 5 (Figura 41), respectivamente. Ressalta-se que o Λ^{MAX} foi calculado considerando todos os 32 cenários da árvore e, portanto, garante que a ENA será sempre positiva e o modelo $ARP(p)$ será linear.

Figura 40 - Diferença do Z_{INF} e Z_{SUP} no Caso 4Figura 41 - Diferença do Z_{INF} e Z_{SUP} no Caso 5.

Nota-se pelas figuras acima que a mudança no modelo $ARP(p)$ não foi suficiente para garantir um resultado adequado, mesmo no caso em que o REE é linear (Caso 4). Isto ocorre porque a correção da Energia Controlável (fc) mantém a não linearidade no modelo ao acoplar duas variáveis de estado, Energia Afluente e Energia Armazenada. Dessa forma, os casos 6 e 7 apresentam a mesma configuração dos dois casos anteriores exceto pelo fc que não é considerado, os resultados dos dois casos são apresentados na Figura 42 e na Figura 43, respectivamente.

Figura 42 - Diferença do Z_{INF} e Z_{SUP} no Caso 6.Figura 43 - Diferença do Z_{INF} e Z_{SUP} no Caso 7.

Os resultados apresentados na Figura 42 são bastante satisfatórios e indicam que com uma modelagem apropriada (linear), a PDDE consegue encontrar a política de operação ótima. Por outro lado, a Figura 43 indica que a aproximação não linear (quadrática) do REE, quando a correção fc é ignorada, continua gerando uma política de operação inadequada, visto que para uma semente, a diferença entre os custos foi significativa.

Por fim, avaliou-se o modelo Independente de Energia Afluente considerando as correções do fc , com REE linear (Figura 44) e não linear (Figura 45). Com isso, ao observar o Caso 8 se confirma que a correção fc só causa consequências indesejáveis quando a Energia Afluente é variável de estado, o que não é o caso no modelo Independente.

Figura 44 - Diferença do Z_{INF} e Z_{SUP} no Caso 8.

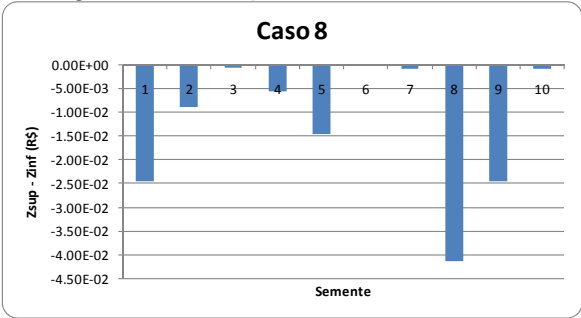
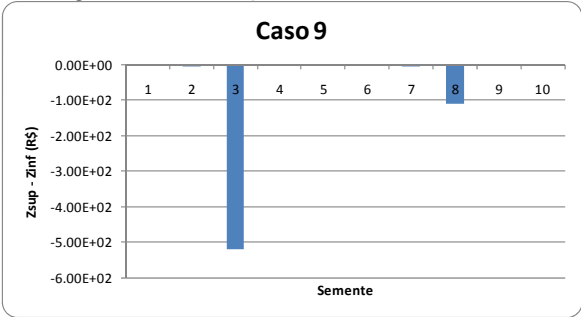


Figura 45 - Diferença do Z_{INF} e Z_{SUP} no Caso 9.



A Tabela 11 mostra os piores resultados de cada caso apresentado nesta seção, isto é, a maior diferença em módulo entre o Z_{INF} e o Z_{SUP} para as 10 sementes. Pela tabela verifica-se que a política de operação ótima para as 10 sementes só foi encontrada nos casos em que o modelo é totalmente linear, ou seja, os casos 1, 6 e 8. Sempre que se adiciona uma não linearidade seja no modelo $ARP(p)$ ou REE, não se pode garantir uma política de operação adequada.

Tabela 11 - Piores resultados em cada caso de Validação do Modelo e Análise das Não Linearidades.

Casos	Z_{SUP} (R\$)	Z_{INF} (R\$)	Diferença (R\$)
1	$1,54031 \cdot 10^6$	$1,54031 \cdot 10^6$	$-6,32000 \cdot 10^{-3}$
2	$7,65413 \cdot 10^8$	$1,60129 \cdot 10^9$	$-9,12697 \cdot 10^8$
3	$3,04957 \cdot 10^7$	$3,04999 \cdot 10^7$	$-4,18866 \cdot 10^3$
4	$2,84265 \cdot 10^7$	$2,84430 \cdot 10^7$	$-1,65297 \cdot 10^4$
5	$1,61764 \cdot 10^7$	$1,61840 \cdot 10^7$	$-7,55845 \cdot 10^3$
6	$1,44989 \cdot 10^7$	$1,44989 \cdot 10^7$	$-2,52484 \cdot 10^{-1}$
7	$1,27061 \cdot 10^8$	$1,27062 \cdot 10^8$	$-6,32324 \cdot 10^2$

8	$1,39257 \cdot 10^6$	$1,39257 \cdot 10^6$	$-4,13890 \cdot 10^{-2}$
9	$2,57326 \cdot 10^6$	$2,57378 \cdot 10^6$	$-5,20943 \cdot 10^2$

5.2.2 Validação do nó fantasma

Ao considerar o primeiro estágio como sendo estocástico em vez de determinístico, como foi o caso dos estudos na Subseção 5.2.1, o cálculo do limite inferior deve ser revisto, uma vez que até o momento tinha-se apenas um único nó para calcular o custo total esperado no primeiro estágio e agora se tem mais nós. Existem duas possibilidades de para calcular o novo valor do limite inferior: (i) ignorar a adição do nó fantasma e calcular o valor esperado do primeiro estágio pela média do Z_{INF} de todos os cenários sorteados para a recursão progressiva da PDDE; (ii) considerar a adição do nó fantasma e gerar cortes de Benders para o estágio “zero”, sendo que a decisão do estágio “zero” não é afetada pelos cortes²⁹.

Dessa forma, este estudo de caso tem por objetivo validar a inclusão do nó fantasma. Para realizar essa análise é necessário estudar um caso pequeno de maneira a enumerar todos os cenários e, com isso, avaliar a diferença entre os limites inferior e superior. Para tanto, foi considerada uma árvore de cenários com cinco estágios e duas aberturas, totalizando 32 cenários.

Nessa análise será considerada a configuração do Caso 8 da subseção anterior, em que a Energia Afluente é gerada com o Modelo Independente, os atributos do REE utilizam aproximações lineares, a correção de Energia Controlável é usada e as Perdas de Energia Fio d'Água não são consideradas. Para este estudo serão analisados quatro casos que são resumidos na Tabela 12, em que nos dois primeiros serão enumerados os 32 cenários da árvore e nos dois últimos serão sorteados 20 cenários a cada iteração, sendo que em dois casos o nó fantasma não é considerado e em outros dois usa-se o nó fantasma.

Tabela 12 - Configuração dos casos para validação do Nó Fantasma.

Caso	Nó fantasma	Cenários na PDDE
1	Sem	32
2	Com	32
3	Sem	20

²⁹ Visto que se tem apenas uma única solução válida, aquela realizada no mês anterior ao estudo.

4	Com	20
---	-----	----

Da mesma forma que o estudo de caso anterior, foram utilizadas 10 sementes diferentes para produzir 10 árvores de cenários distintas e o critério de parada da PDDE foi o número máximo de iterações, sendo que o valor limite foi de 30 iterações. É importante destacar que as 10 árvores de cenários são exatamente as mesmas para todos os quatro casos da tabela acima.

Como comentado, a preocupação com a adição do nó fantasma é manter a coerência do cálculo do limite inferior que será utilizado no critério de parada da PDDE e em análises futuras. Nos dois primeiros casos, com a enumeração de todos os cenários, o cálculo do limite inferior deve fornecer exatamente o mesmo resultado, uma vez que a média dos 32 cenários representa a árvore de forma completa, assim como a geração dos cortes de Benders para o nó fantasma.

Antes de comparar os dois limites inferiores, faz-se necessário mostrar que o critério de parada da PDDE é atingido na 30ª iteração. Para tanto, a Figura 46 ilustra a diferença entre o Z_{INF} e o Z_{SUP} na última iteração para as 10 sementes para o Caso 1, assim como a Figura 47 apresenta para o Caso 2. Conforme pode ser observado pelas figuras abaixo, a diferença entre os dois limites é praticamente nula confirmando a convergência da PDDE.

Figura 46 - Diferença do Z_{INF} e Z_{SUP} no Caso 1.

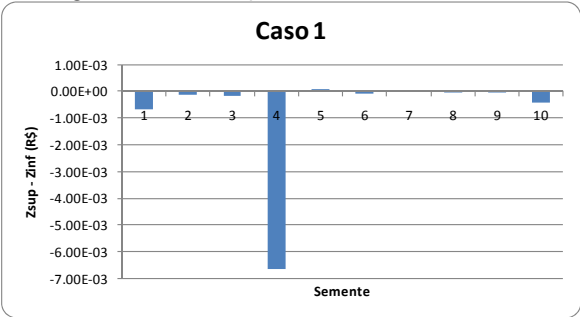
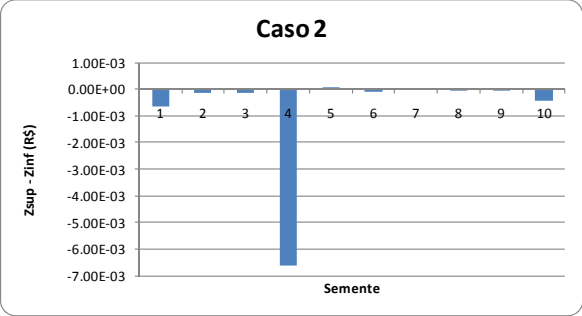


Figura 47 - Diferença do Z_{INF} e Z_{SUP} no Caso 2.



Com a convergência atingida, fez-se uma comparação entre os Z_{INF} dos dois casos, isto é, avaliou-se a diferença dos dois limites inferiores para as 10 sementes. Como resultado tem-se que essa diferença foi nula para todas as 10 sementes, indicando que ambos os casos podem ser utilizados para calcular o Z_{INF} quando da enumeração de todos os cenários. Em outras palavras, quando se faz a enumeração exaustiva da árvore de cenários é indiferente sob o ponto de vista de Z_{INF} usar ou não o conceito de nó fantasma.

Sabe-se que, quando a política de operação for ótima para a árvore de cenários, tem-se o maior valor possível para o Z_{INF} . Nesse sentido, os casos 3 e 4 serão utilizados para avaliar o cálculo do limite inferior quando não for possível enumerar todos os cenários, sendo que o valor do Z_{INF} deverá ser sempre menor ou igual que o valor obtido nos casos 1 e 2. Dessa forma, a Figura 48 apresenta a diferença entre o Z_{INF} do caso 2 com o caso 3 na 30ª iteração, bem como a Figura 49 compara os casos 2 e 4.

Figura 48 - Diferença do Z_{INF} dos Casos 2 e 3.

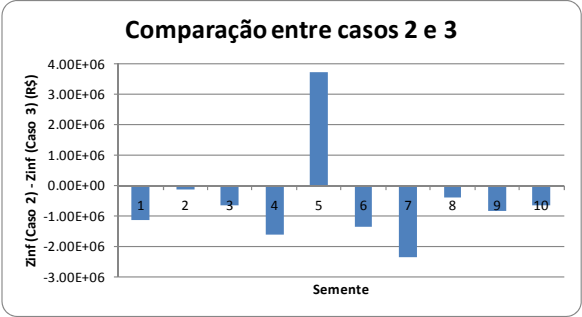
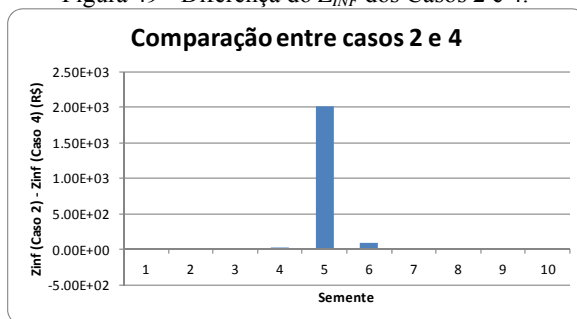


Figura 49 - Diferença do Z_{INF} dos Casos 2 e 4.

Nota-se pelas figuras acima que, para algumas sementes, o Z_{INF} do Caso 3 ultrapassa o valor do Caso 2 e, portanto, indica que existe alguma inconsistência no cálculo do limite inferior. Por outro lado, o Z_{INF} do Caso 4 não ultrapassou o valor do Caso 2 em nenhum dos casos, indicando uma consistência no cálculo do limite inferior.

Dessa forma, esta etapa dos estudos de caso mostrou que quando se deseja considerar o primeiro estágio estocástico, mas não se consegue resolver a árvore completa, sugere-se adicionar um nó fantasma para calcular o Z_{INF} de maneira correta.

5.3 SISTEMA HIDROTÉRMICO – JANEIRO/2012

Os resultados apresentados na próxima seção foram obtidos considerando todo o Sistema Interligado Nacional (SIN), para as condições de armazenamento ao final de Dezembro de 2011. Os dados referentes às usinas foram retirados integralmente do conjunto de arquivos utilizado pelo modelo NEWAVE para realizar os estudos energéticos de Janeiro de 2012, que está disponível no site da CCEE.

Da mesma forma que nos estudos anteriores, o SIN foi dividido em 4 subsistemas elétricos ilustrados na Figura 35. Neste caso o sistema é composto por 158 usinas hidrelétricas e 151 usinas termelétricas, desconsiderando as usinas de pequeno porte. As usinas estão distribuídas nos subsistemas segundo apresentado na Tabela 13.

Tabela 13 - Distribuição de UHEs e UTEs nos subsistemas.

Subsistema	Número de UHE	Número de UTE
SE/CO	102	50
S	31	23
NE	11	63
N	14	15
Total	158	151

Na sequência, são apresentadas apenas as principais características do sistema para o primeiro mês ou primeiro ano, os demais dados podem ser obtidos nos conjunto de arquivos disponibilizados pela CCEE. A Tabela 14 apresenta os limites de intercâmbios entre os subsistemas para Janeiro/2012.

Tabela 14 - Limites de intercâmbios (MWmédio) entre os subsistemas para Janeiro/2012.

		Destino				
		SE/CO	SU	NE	N	Imperatriz
Origem	SE/CO		5000	1000	-	4000
	SU	5140		-	-	-
	NE	600	-		-	2249
	N	-	-	-		99999
	Imperatriz	3154	-	3300	3083	

A demanda de cada subsistema é apresentada na Tabela 15, enquanto que os patamares de déficit e o custo de cada patamar de déficit para Janeiro/2012 são ilustrados pela Tabela 16. O percentual da profundidade de cada patamar do déficit é relativo à demanda do subsistema em cada estágio em estudo.

Tabela 15 - Demanda de energia (MWmédio) dos subsistemas.

Mês	Subsistema			
	SE/CO	S	NE	N
Janeiro/2012	37171	10375	8887	4132
Fevereiro/2012	38129	10589	8782	4161
Março/2012	38597	10652	8818	4268
Abril/2012	37980	10185	8705	4270
Mai/2012	37294	9889	8540	4337
Junho/2012	37075	9890	8326	4327

Julho/2012	37166	9810	8349	4295
Agosto/2012	37753	9806	8526	4340
Setembro/2012	37912	9687	8775	4347
Outubro/2012	38100	9774	8988	4346
Novembro/2012	37634	9899	9046	4345
Dezembro/2012	36954	10025	8971	4309

Tabela 16 - Profundidade e custo dos patamares de déficit para cada subsistema para Janeiro/2012.

	Profundidade (%)				Custo (R\$/MWh)			
	1	2	3	4	1	2	3	4
SE/CO	5	5	10	80	1206,38	2602,56	5439,12	6180,26
S	5	5	10	80	1206,38	2602,56	5439,12	6180,26
NE	5	5	10	80	1206,38	2602,56	5439,12	6180,26
N	5	5	10	80	1206,38	2602,56	5439,12	6180,26

A demanda de cada subsistema foi dividida em três patamares de carga: leve, média e pesada. Assim, os parâmetros dos patamares de carga para Janeiro/2012 são apresentados na Tabela 17.

Tabela 17 - Parâmetros dos patamares de carga para Janeiro/2012.

Característica	SE/CO	S	NE	N
Fator de Carregamento Leve	0,8602	0,8431	0,9096	0,9620
Fator de Carregamento Médio	1,0744	1,0989	1,0395	1,0125
Fator de Carregamento Pesado	1,1253	1,0643	1,1239	1,0727
Fator de Patamar Leve	0,3724	0,3724	0,3724	0,3724
Fator de Patamar Médio	0,5228	0,5228	0,5228	0,5228
Fator de Patamar Pesado	0,1048	0,1048	0,1048	0,1048

A geração de pequenas usinas para Janeiro de 2012, em MWmédio, foi de 2402, 804, 430 e 47 para os subsistemas SE/CO, S, NE e N, respectivamente. Por fim, considerou-se que as Energias Afluentes dos meses anteriores ao estudo são dadas pelos valores da Tabela 18.

Tabela 18 - Energia afluentes (MWmês) dos meses anteriores ao início do estudo.

Mês	Subsistema			
	SE/CO	S	NE	N
Dezembro/2011	44305	3743	11112	6035
Novembro/2011	27235	6859	3832	3083
Outubro/2011	25113	11056	2734	1431
Setembro/2011	16680	24913	2038	942
Agosto/2011	24182	29771	2498	1372
Julho/2011	24466	22210	3155	2195
Junho/2011	28169	8058	3703	3950
Mai/2011	33827	6062	5925	11630
Abril/2011	55315	10929	15222	15950
Março/2011	86149	12466	11104	16517
Fevereiro/2011	48930	20232	9113	11677
Janeiro/2011	76369	11803	13143	7490

A condição inicial de armazenamento nos reservatórios foi de aproximadamente 61%, 60%, 58% e 91% da energia armazenável máxima dos subsistemas SE/CO, S, NE e N, respectivamente.

5.4 ESTUDOS DE CASOS – JANEIRO/2012

Os estudos de casos com o conjunto de dados de Janeiro/2012 foram divididos em três etapas. Na primeira, serão avaliadas as estratégias para melhorar o desempenho da PDDE, que incluem as estratégias de solução da PDDE e a seleção de cortes. Na segunda etapa, faz-se a avaliação da política de operação para os diferentes sorteios da árvore de cenários (MC, LHS e QMCA), para o cálculo da política de operação será utilizada a estratégia que foi considerada a melhor nos estudos de desempenho da PDDE. Por fim, será analisada a inclusão da modelagem de aversão a risco ao problema, por meio da combinação convexa entre o valor esperado e o *Conditional Value-at-Risk* (CVaR). Nesse caso mantém-se a PDDE sem a seleção de cortes e utiliza-se

apenas a estratégia de solução com o número de cenários por recursão crescente.

5.4.1 Melhoria do desempenho da PDDE

Conforme comentado, nesta seção discutem-se os resultados das estratégias que buscam melhorar o desempenho da PDDE, em termos de política operativa e tempo computacional. Para tanto, são analisados 21 casos variando as estratégias de solução da PDDE (tradicional, com um cenário por recursão e incrementando o número de cenários) e as técnicas de seleção de cortes (mantendo os últimos cortes, seleção dinâmica e nível de dominância) para um horizonte de 120 estágios. A Tabela 19 resume os casos avaliados nesta seção.

Tabela 19 - Casos para análise de desempenho da PDDE.

	Identificação	Estratégia de Solução da PDDE	Seleção de cortes
1	600 Cortes	1 Cenário	Últimos 600 Cortes
2	1000 Cortes	1 Cenário	Últimos 1000 Cortes
3	Nível 1	1 Cenário	Nível de dominância 1
4	Nível 2	1 Cenário	Nível de dominância 2
5	Nível 3	1 Cenário	Nível de dominância 3
6	Seleção Dinâmica	1 Cenário	Seleção Dinâmica
7	Sem Seleção	1 Cenário	Sem Seleção
8	600 Cortes	Incrementando	Últimos 600 Cortes
9	1000 Cortes	Incrementando	Últimos 1000 Cortes
10	Nível 1	Incrementando	Nível de dominância 1
11	Nível 2	Incrementando	Nível de dominância 2
12	Nível 3	Incrementando	Nível de dominância 3
13	Seleção Dinâmica	Incrementando	Seleção Dinâmica
14	Sem Seleção	Incrementando	Sem Seleção

15	600 Cortes	Tradicional	Últimos 600 Cortes
16	1000 Cortes	Tradicional	Últimos 1000 Cortes
17	Nível 1	Tradicional	Nível de dominância 1
18	Nível 2	Tradicional	Nível de dominância 2
19	Nível 3	Tradicional	Nível de dominância 3
20	Seleção Dinâmica	Tradicional	Seleção Dinâmica
21	Sem Seleção	Tradicional	Sem Seleção

Em todos os casos acima se considera a mesma árvore de cenários, construída com base no modelo Independente com sorteio de Monte Carlo para obter 20 realizações para cada estágio. A política é calculada ao longo de 50 iterações com 200 cenários por iteração sorteados por Monte Carlo (a cada iteração um novo sorteio de 200 cenários é realizado), assim são construídos 10000 cortes de Benders. Os cortes são salvos em arquivos de maneira sequencial, com isso, para cada caso, são feitas 12 simulações com 5000 cenários, que foram sorteados por Monte Carlo dentro da árvore de cenários. Todas as simulações usaram os mesmos cenários, portanto, a diferença está no número de cortes usados em cada simulação: 200, 400, 600, 800, 1000, 2000, 3000, 4000, 6000, 8000 e 10000.

É importante destacar que no caso de 1 Cenário por recursão, devido ao processamento paralelo, ao invés de 1 existiam 10 cenários, sendo um para cada processo. Além disso, o caso em que número de cenários é incrementado, o processo iterativo é iniciado com 10 cenários, um em cada processo paralelo, e a cada iteração são adicionados 10 cenários, novamente um para cada processo.

Devido a grande quantidade de casos, para facilitar o acompanhamento dos resultados, opta-se por apresentar os resultados dos sete casos de cada estratégia de solução. Em cada uma das estratégias é selecionado um caso para comparar as estratégias entre elas.

Inicialmente, a Figura 50 ilustra o comportamento do Z_{INF} ao longo das iterações para cada uma das técnicas de seleção de cortes considerando a estratégia de solução com um cenário por recursão, para os quais não se percebe uma diferença significativa em nenhum dos casos. A Figura 51 apresenta a mesma informação, porém com um zoom nas últimas iterações. Com isso, é possível observar que a diferença não é significativa em termos de limite inferior.

Figura 50 - Limite inferior dos casos com 1 cenário por recursão.

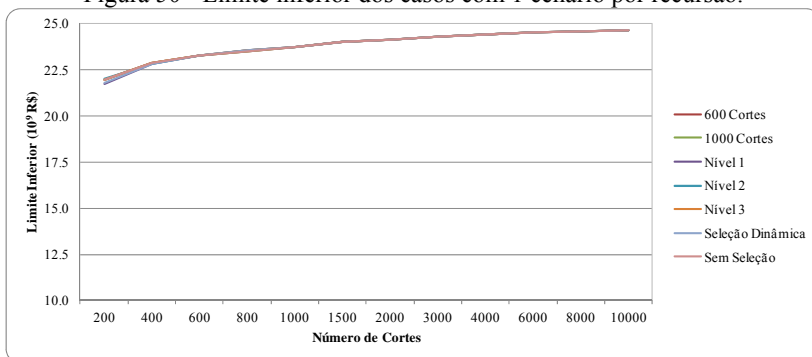
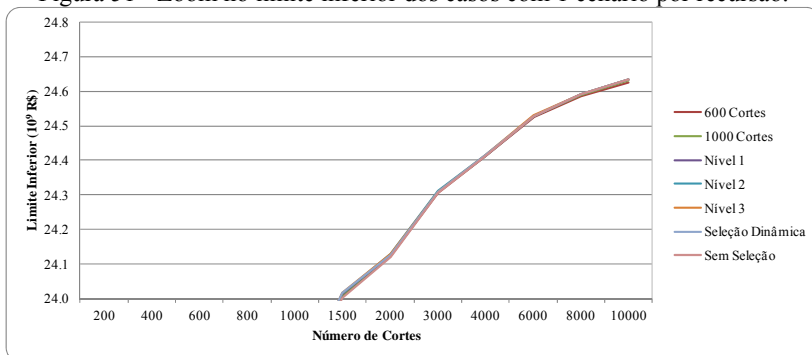


Figura 51 - Zoom no limite inferior dos casos com 1 cenário por recursão.



Entretanto, como o limite inferior é apenas uma aproximação do custo esperado de operação, a Figura 52 ilustra o custo esperado de operação dos 5000 cenários, nos quais nota-se uma diferença maior apenas quando o número de cortes era menor que 1000. Da mesma maneira que na análise anterior, a Figura 53 apresenta um zoom da Figura 52, com o objetivo de avaliar com mais detalhes cada um dos casos.

Figura 52 - Custo esperado de operação para 1 cenário por iteração.

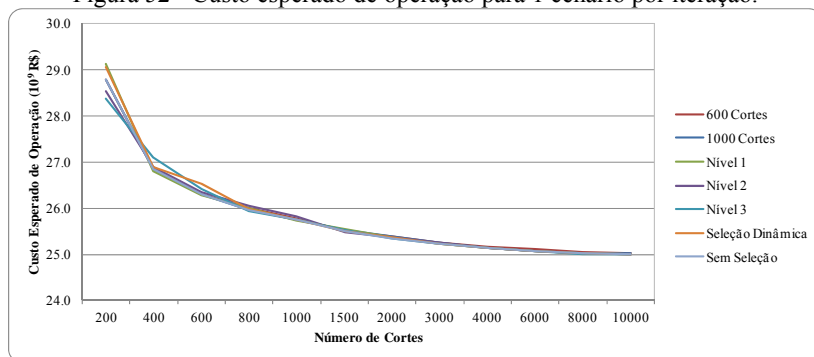
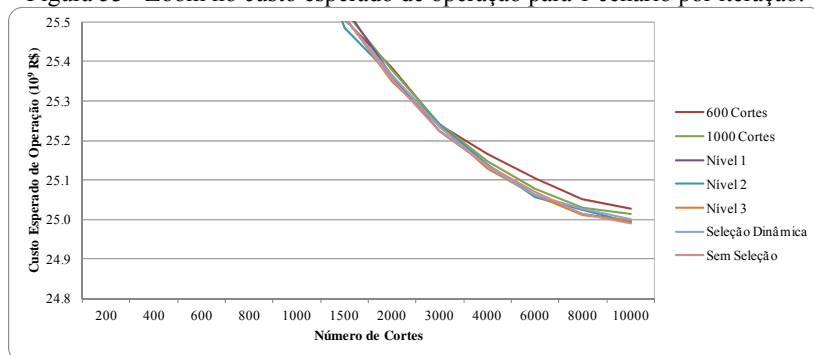


Figura 53 - Zoom no custo esperado de operação para 1 cenário por iteração.

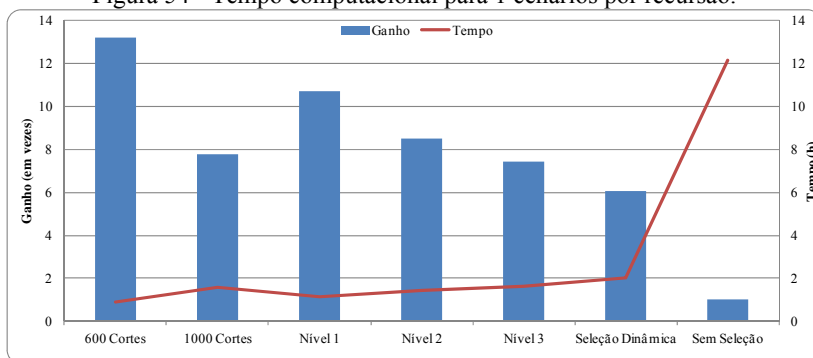


Ao analisar a Figura 53 se verifica que os casos em que se mantiveram apenas os últimos 600 e 1000 cortes produziram custos ligeiramente superiores aos demais, enquanto que a diferença entre os demais cinco casos é praticamente nula em relação ao caso em que todos os 10000 cortes são considerados (i.e., caso sem seleção). Como consequência, do ponto de vista de custo, não há muita diferença entre optar pelos casos com os diversos níveis de dominância, de seleção dinâmica e sem seleção. Portanto, com intuito de qualificar mais adequadamente o processo de seleção deve-se analisar o desempenho em termos de esforço computacional.

Nesse sentido, a Figura 54 mostra os tempos computacionais (linha vermelha) e os ganhos com relação ao maior tempo obtido (sem seleção) que as técnicas de seleção de cortes propiciam. O menor tempo computacional é o caso em que se mantiveram apenas os últimos 600 cortes. No entanto, note que este caso não faz parte da pré-seleção feita de acordo com o custo esperado de operação. Na sequência é a

metodologia que seleciona por nível de dominância igual a 1, consequentemente, essa é a configuração escolhida dentre as sete analisadas. De acordo com a figura se verifica que é obtida uma redução do tempo computacional em quase 11 vezes em relação ao algoritmo sem seleção.

Figura 54 - Tempo computacional para 1 cenários por recursão.



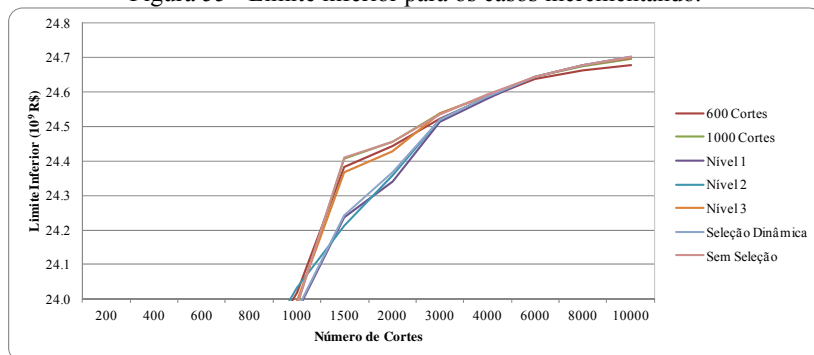
Essa análise é feita apenas para o caso de Janeiro/2012 com a árvore de cenários em questão, sendo possível, portanto, que a eficiência das metodologias varie com o problema, dados de entrada e árvore de cenários. Outro aspecto que precisa ser destacado é o fato de que a diferença no custo esperado entre os casos de 600 Cortes e Nível 1 não é significativa a ponto de se optar “cegamente” pelo segundo em detrimento ao primeiro. Nesse caso é escolhido o Nível 1, pois apresenta um bom compromisso entre custo e tempo computacional e sob ponto de vista metodológico é um método mais robusto para diferentes árvores de cenários e dados de entrada.

Na sequência, analisam-se os casos em que a estratégia de solução iniciou com 1 cenário por recursão em cada processo paralelo e a cada iteração seria adicionado 1 cenário para cada processo; assim, após 20 iterações todos os 200 cenários da iteração seriam percorridos em um única recursão. Então, após a 20ª iteração nenhum cenário seria adicionado nas demais iterações. Contudo, devido à maneira como o processamento paralelo é implementado no modelo computacional, o número de cenários que devem ser incrementados não pode ser 1 para cada processo. Para melhor compreensão considere o caso com 200 cenários por iteração e 10 processos paralelos; cada processo pode visitar de 1 a 20 cenários, porém, na implementação só é possível visitar um número de cenários por recursão que seja um divisor inteiro do valor máximo, i.e., 20. Com isso, por exemplo, não é possível ter 3 cenários

por recursão e, conseqüentemente, atinge-se o total de 200 cenários após 6 iterações.

Para esses casos apenas as figuras com zoom serão mostradas, uma vez que essas apresentam todas as informações necessárias para análise. Dessa forma, a Figura 55 apresenta o Z_{INF} para as sete técnicas de seleção de cortes, na qual se nota que até 3000 cortes há uma diferença significativa entre os casos Nível 1, Nível 2 e Seleção Dinâmica com os demais. No entanto, após 3000 cortes o Z_{INF} é muito parecido em todos os casos, exceto ao final do processo iterativo, i.e., 8.000 e 10.000 cortes, que o caso com os últimos 600 cortes ficou ligeiramente menor que os demais.

Figura 55 - Limite inferior para os casos incrementando.



Do ponto de vista do custo esperado de operação, a Figura 56 mostra que novamente os custos são muito similares para todos os conjuntos de cortes. Contudo, tem-se um custo esperado um pouco maior nos casos em que se mantêm os últimos 600 e 1000 cortes. Assim, ao observar a Figura 57 que ilustra os tempos computacionais tem-se a mesma dificuldade do caso anterior, visto que o caso com 600 Cortes tem o maior ganho computacional, enquanto que o Nível 1 apresenta um bom ganho com resultados de custos melhores. Com isso, deve-se concluir que a melhor opção é, novamente, o caso com Nível de Dominância igual a 1.

Figura 56 - Custo esperado de operação para os casos incrementando.

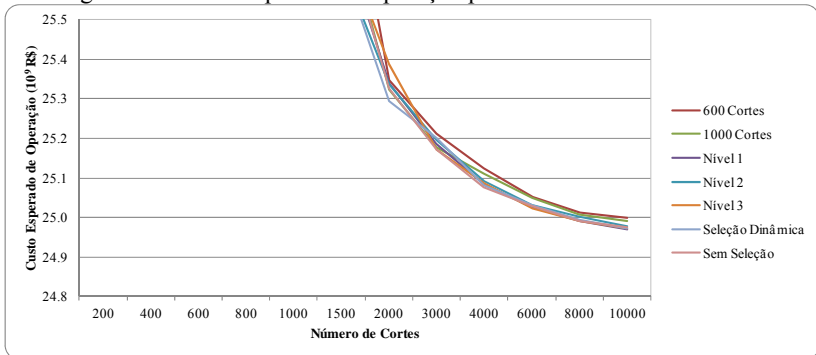
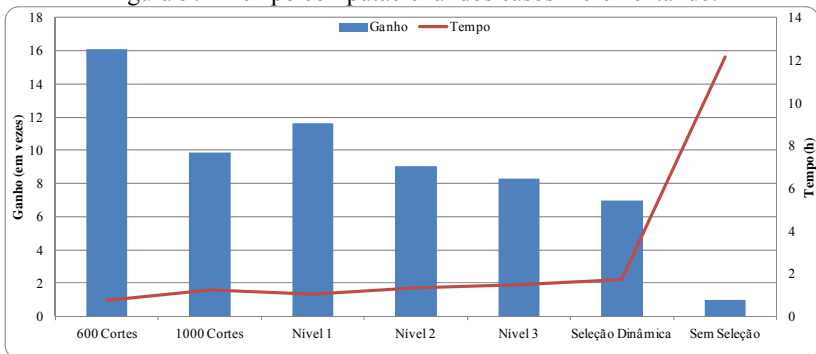
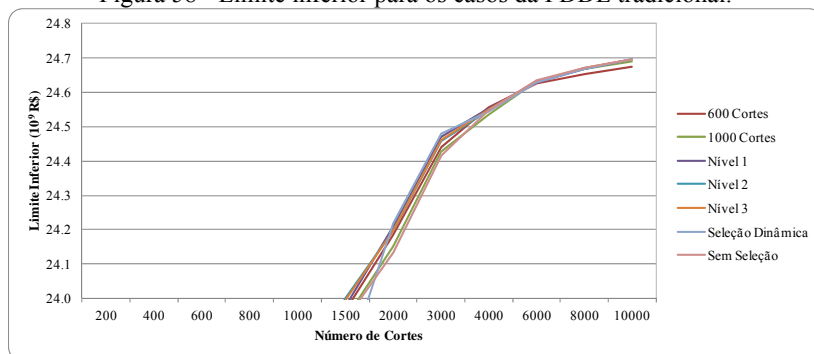


Figura 57 - Tempo computacional dos casos incrementando.



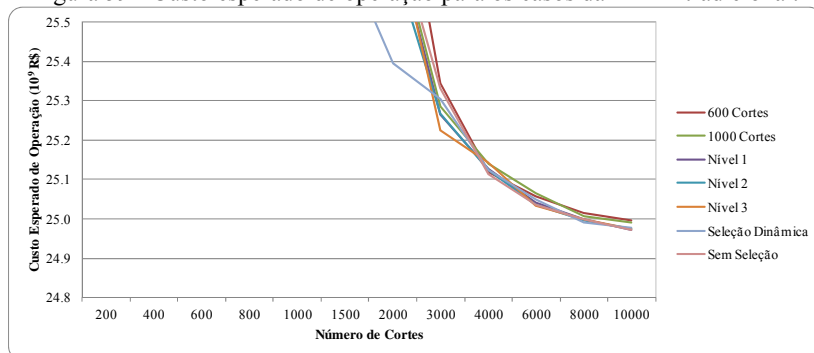
A última estratégia de solução da PDDE analisada foi a Tradicional, na qual se mantém a estratégia de percorrer todos os cenários na mesma recursão, que nesse caso são 200 cenários por recursão. A Figura 58 apresenta o limite inferior para as sete metodologias de seleção de cortes, na qual se verifica que há sempre casos em que os valores são ligeiramente diferentes, exceto quando foram considerados 6000 cortes que todos obtêm praticamente o mesmo valor.

Figura 58 - Limite inferior para os casos da PDDE tradicional.



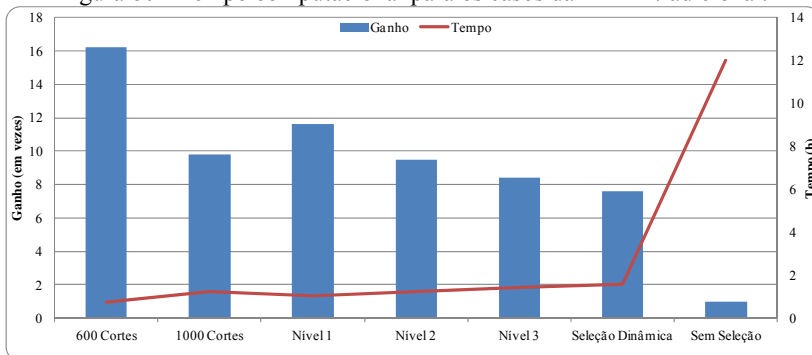
Destaca-se pela figura acima que os casos em que a seleção é feita pelo nível de dominância 1 e 2 estão sempre entre os valores com maior Z_{INF} . Contudo, a principal informação refere-se ao custo esperado de operação, que conforme pode ser visto pela Figura 59 tem a Seleção Dinâmica com menor custo até 3.000 cortes. Porém, a partir de 4.000 cortes os casos Nível 1, Nível 2 e Sem Seleção produziram o menor custo de forma mais consistente. Nas análises com 10.000 cortes apenas os casos com 600 Cortes e 1.000 Cortes obtêm um custo esperado ligeiramente maior.

Figura 59 - Custo esperado de operação para os casos da PDDE tradicional.



A Figura 60 apresenta o tempo computacional, na qual se observa o mesmo comportamento visto nos casos anteriores. Dessa forma, assim como nos outros casos a configuração escolhida é o caso em que se selecionam os cortes com o nível de dominância unitário, devido ao bom compromisso entre resultado e tempo computacional.

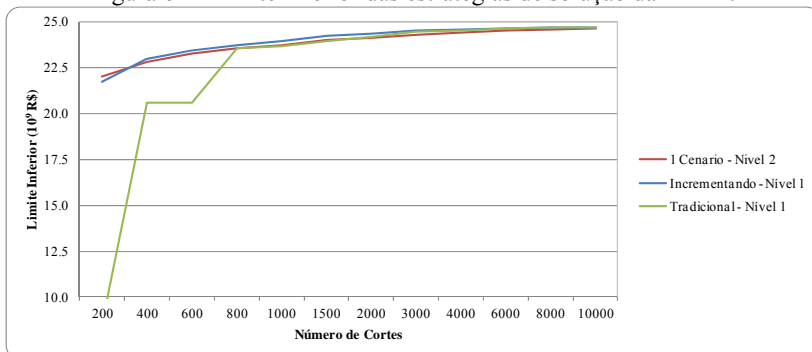
Figura 60 - Tempo computacional para os casos da PDDE tradicional.



Por fim, discutem-se as comparações entre as diferentes estratégias de solução da PDDE. Vale destacar que a análise que se segue refere-se aos casos com nível de dominância 1, visto que os mesmos apresentaram o melhor desempenho em termos de custo e tempo computacional. Após 10000 cortes, a diferença de custos foi muito pequena, enquanto que o ganho em termos computacionais foram significativos quando comparado aos casos Sem Seleção. Esses aspectos fortalecem o indicativo de que a seleção de cortes foi razoavelmente consistente em todas as estratégias de solução.

Conforme já discutido em (DE MATOS *et al.*, 2011; SHAPIRO *et al.*, 2011), a Figura 61 mostra que nas primeiras iterações a PDDE Tradicional apresenta um desempenho muito inferior aos casos em que se inicia com apenas um cenário por recursão.

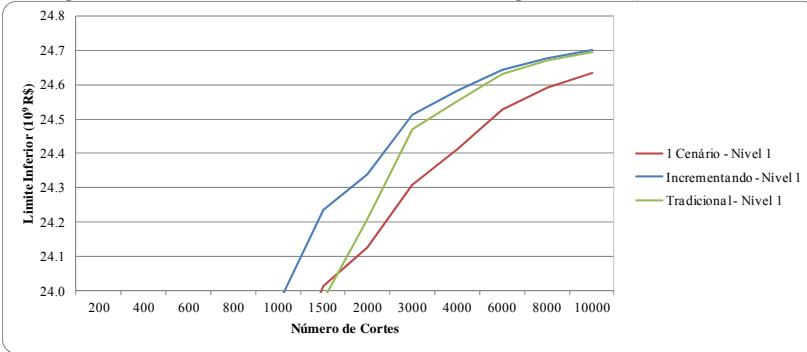
Figura 61 - Limite inferior das estratégias de solução da PDDE.



Para uma análise ao final do processo iterativo, a Figura 62 apresenta um zoom da figura anterior. Por essa figura se nota que a estratégia de solução em que se incrementa o número de cenários a cada

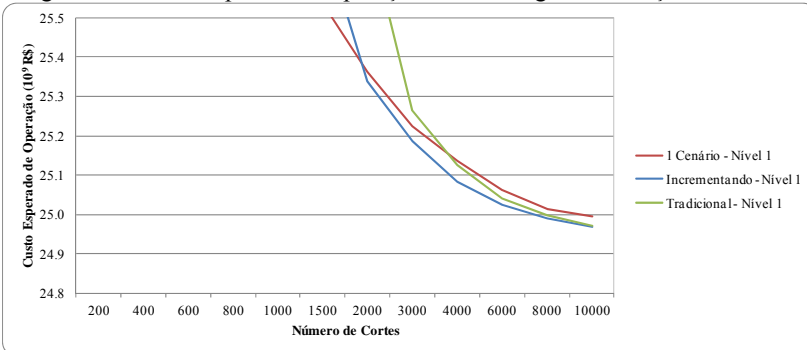
recursão fornece um limite inferior sempre maior que os demais. Além disso, vale destacar que apesar do caso em que se visita um cenário por recursão ser mais eficiente no início do processo iterativo, ao final do processo iterativo tal esquema se torna menos eficiente, pois visitar um número maior de cenários a cada recursão é mais interessante. Naturalmente que há um limite para o qual essa vantagem permanece, mas não foi objetivo deste estudo de casos avaliar qual deveria ser o número de cenários a cada iteração.

Figura 62 - Zoom no limite inferior das estratégias de solução da PDDE.



A Figura 63 apresenta o custo esperado de operação, na qual se observa que entre 1500 e 2000 cortes existe um ponto de quebra em que visitar um cenário por recursão torna-se pior que incrementar o número de cenários visitados em uma recursão. A partir de esse ponto incrementar o número de cenários é sistematicamente superior que o caso em que se mantém um cenário por recursão.

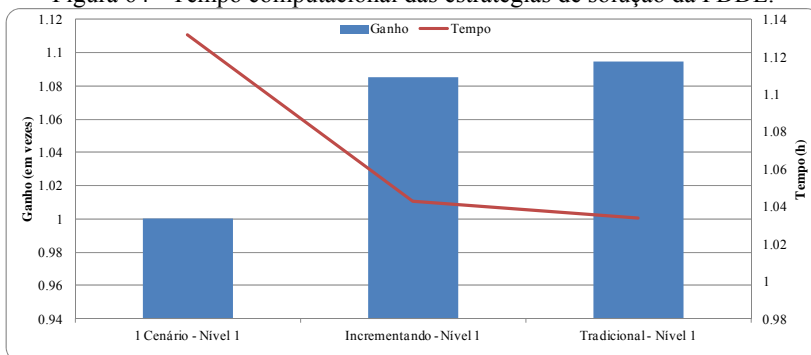
Figura 63 - Custo esperado de operação das estratégias de solução da PDDE.



Um aspecto interessante é o fato de a PDDE Tradicional após 10000 cortes produzir uma política operativa com os custos superior e inferior muito parecidos com o caso em que se incrementou os cenários visitados a cada recursão. Dessa forma, tem-se um indicativo de que custo esperado de operação ótimo está próximo do valor encontrado, além da proximidade com o limite inferior que é um indicativo bastante forte.

Finalmente, a Figura 64 mostra que os tempos computacionais foram muito similares com uma pequena vantagem para os casos Incrementando e Tradicional, sendo que isso ocorre porque o algoritmo para verificar os cortes mais significativos é rodado com menos frequência. Ressalta-se que os valores de ganho da figura abaixo são obtidos tendo o maior deles como referência, que nesse caso é quando se utiliza um cenário por recursão ao longo de todo o processo iterativo.

Figura 64 - Tempo computacional das estratégias de solução da PDDE.



Com isso, conclui-se que as técnicas de seleção de cortes não causam um impacto significativo em termos de custo ao final do processo iterativo, mas reduzem significativamente o tempo computacional para obter a política de operação (em alguns casos em até 16 vezes). Nesses estudos de caso destaca-se como uma boa opção a metodologia em que se seleciona os cortes por nível de dominância unitária, ou seja, mantém-se apenas os cortes mais caros para os estados visitados.

5.4.2 Avaliação da Política de Operação

Na seção anterior são discutidas algumas metodologias para melhorar o desempenho da PDDE, sendo que o caso 10 da Tabela 19 é aquele que consegue obter os melhores resultados para o caso em

estudo. Assim, essa estratégia de solução é escolhida para avaliar a qualidade da política de operação utilizando as metodologias discutidas nas Seções 2.6 e 4.4. Além disso, nesta seção são comparadas as técnicas de redução de variância no sorteio da árvore de cenários, as quais são discutidas na Seção 4.2.

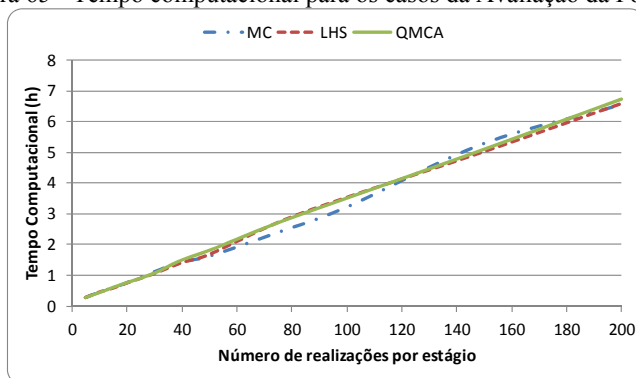
Dessa forma, são construídas cinco políticas de operação com 8000 cortes, 40 iterações com 200 cenários por iteração, para árvores de cenários com número de realizações por estágio igual a 5, 10, 15, 20, 30, 40, 50, 75, 100, 150 e 200, para os sorteios de MC, LHS e QMCA. Com isso, tem-se um total 165 políticas de operação considerando cinco sementes. O algoritmo utilizou como critério o número de 40 iterações, uma vez que os resultados da Seção 5.4.1 indicaram que não havia um ganho significativo na política mesmo após 10 iterações adicionais.

De maneira a calcular o Intervalo de Confiança (IC) para o *gap* de otimalidade, cada política de operação foi simulada em 5000 cenários que são sorteados diretamente da distribuição de probabilidade, i.e., fora da respectiva árvore de cenários, e 5000 cenários que foram sorteados dentro da árvore de cenários. A primeira simulação é utilizada para calcular o limite superior do IC, enquanto que a segunda é usada no cálculo alternativo do limite inferior, conforme discutido na Seção 4.4. Ressalta-se que em todos os casos foi utilizado o método de MC para sortear os cenários que foram percorridos no algoritmo da PDDE e nas simulações.

A avaliação da política é feita para o modelo independente para geração das Energias Afluentes que compõem as árvores de cenários. Neste ponto é importante destacar que as conclusões e análises nesta seção são válidas para a configuração em estudo, visto que qualquer alteração no problema pode mudar o comportamento das políticas de operação.

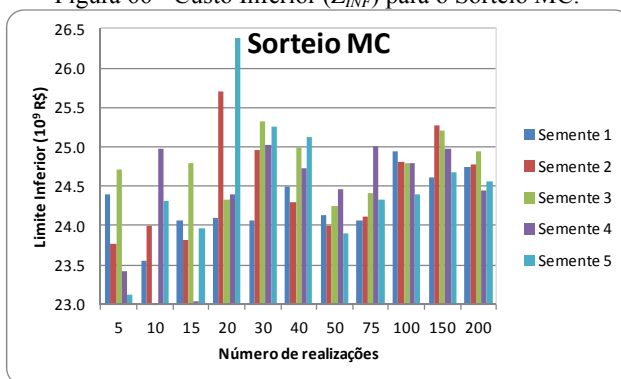
Inicialmente, a Figura 65 apresenta os tempos computacionais (em horas) para calcular a política de operação com as três técnicas de amostragem em função do número de aberturas, na qual se pode notar que o tempo computacional cresce linearmente com o número de aberturas. A informação na figura abaixo é para apenas uma semente, mas reflete os resultados das demais sementes também. Este comportamento era esperado, pois o acréscimo de realizações em cada estágio aumenta apenas o número de problemas de PL a serem resolvidos na recursão regressiva e de maneira linear, como esta recursão domina o tempo computacional da PDDE o crescimento é praticamente linear.

Figura 65 - Tempo computacional para os casos da Avaliação da Política.

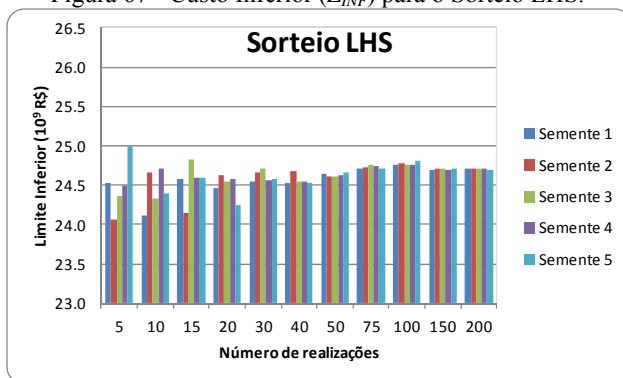
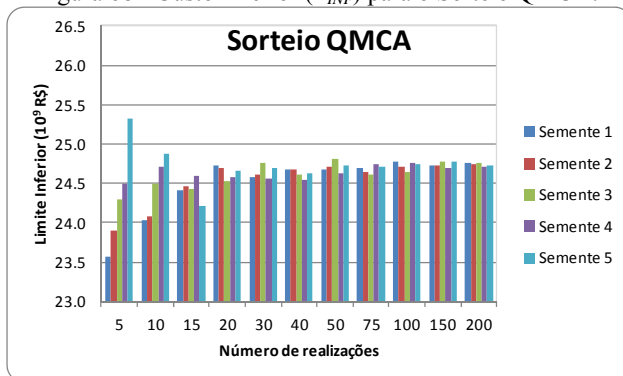


Apesar dos tempos crescerem à medida que se aumenta o número realizações, espera-se calcular políticas operativas mais próximas à política ótima referente ao problema original, com função densidade de probabilidade contínua. Devido à grande quantidade de políticas em análise, dividiu-se a informação dos gráficos a seguir para cada tipo de sorteio (MC, LHS e QMCA). Nesse sentido, a Figura 66 ilustra o custo interior (Z_{INF}) para o sorteio MC, na qual se verifica uma oscilação bastante significativa para as diferentes sementes com árvores de cenários com o mesmo número de aberturas.

Figura 66 - Custo Inferior (Z_{INF}) para o Sorteio MC.



Por outro lado, pela Figura 67, que apresenta o custo inferior para o sorteio LHS, se verifica uma estabilidade crescente à medida que se aumentou o número de realizações por estágio da árvore de cenários. Este mesmo comportamento pode ser observado na Figura 68 que mostra o caso em que os sorteios foram feitos pelo QMCA.

Figura 67 - Custo Inferior (Z_{INF}) para o Sorteio LHS.Figura 68 - Custo Inferior (Z_{INF}) para o Sorteio QMCA.

Apesar dos resultados do Z_{INF} serem uma primeira análise importante, um resultado de maior relevância é o custo esperado de operação das políticas de operação quando simuladas nos 5000 cenários fora de árvore de cenários. Assim, a Figura 69 apresenta o custo esperado de operação para os casos em que a política foi construída para uma árvore de cenários amostrada com MC, na qual se nota um comportamento mais estável e assintótico que o custo inferior. Da mesma forma, a Figura 70, em que o sorteio foi o LHS, e a Figura 71, com sorteio QMCA, apresentaram o comportamento assintótico, sendo que em ambos os casos as políticas foram mais baratas que no caso do sorteio MC. Ressalta-se que as simulações foram feitas com base nos mesmo 5000 cenários em todos os casos.

Figura 69 - Custo esperado de operação nos 5000 cenários do Sorteio MC.

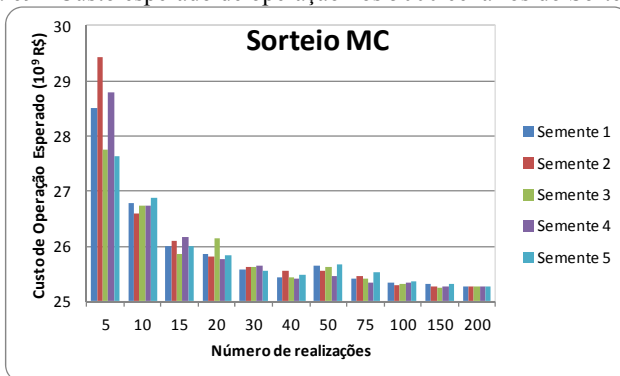


Figura 70 - Custo esperado de operação nos 5000 cenários do Sorteio LHS.

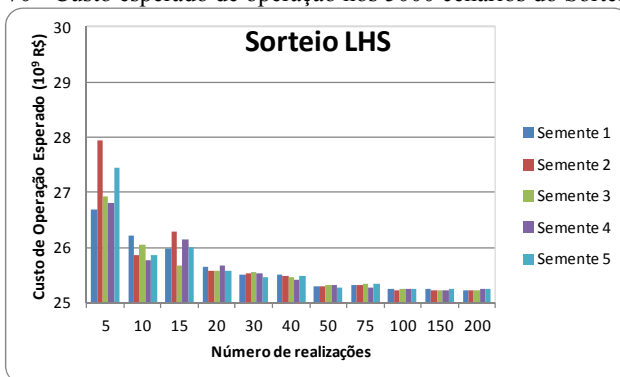
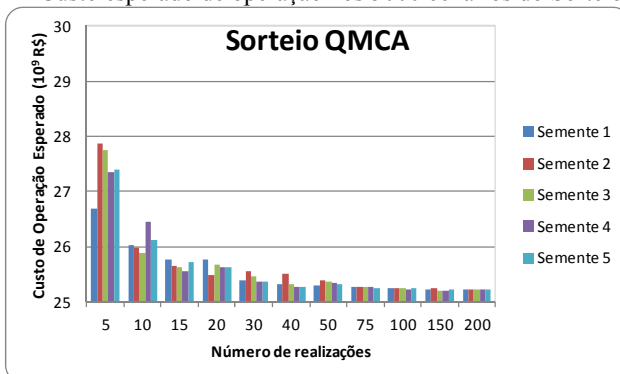


Figura 71 - Custo esperado de operação nos 5000 cenários do Sorteio QMCA.



Os resultados de custo esperado de operação permitem ter uma boa noção da qualidade da política de operação, mas a mesma só pode ser medida de maneira mais precisa por meio do IC do *gap* de otimalidade. Nesse sentido, a Figura 72 ilustra o IC com 95% de confiança do *gap* de otimalidade para a metodologia tradicional para os casos com sorteio MC, sendo que o Limite Inferior foi obtido pelo valor médio dos 165 casos analisados nesta seção. Na mesma direção, a Figura 73 mostra o IC tradicional dos casos com sorteio LHS, enquanto que Figura 74 apresenta os casos QMCA.

Pelas figuras abaixo, se verifica que os casos com sorteio LHS e QMCA produziram ICs menores que o caso MC, isto era esperado uma vez que se utilizou o mesmo limite inferior para todos os casos. Assim, a diferença entre os casos decorre do custo esperado de operação e o respectivo desvio padrão. Destaca-se, também, que o LHS produziu ICs menores que o QMCA para árvores de cenários com baixo número de realizações por estágio, enquanto que para as maiores árvores de cenários o QMCA foi ligeiramente melhor que o LHS (menor IC).

Figura 72 - IC de 95% do *gap* de otimalidade tradicional com Sorteio MC.

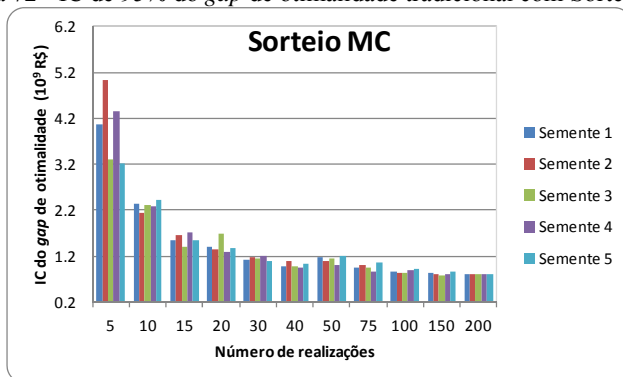


Figura 73 - IC de 95% do *gap* de otimalidade tradicional com Sorteio LHS.

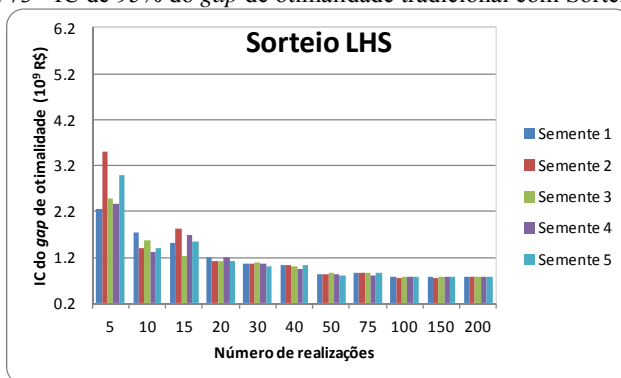
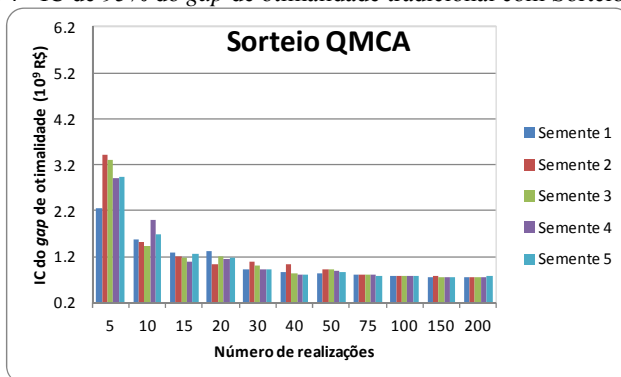


Figura 74 - IC de 95% do *gap* de otimalidade tradicional com Sorteio QMCA.



A Figura 75 apresenta a mesma informação que a Figura 72, porém os valores apresentados são percentuais do IC em relação ao custo esperado de operação. Da mesma forma, a Figura 76 e a Figura 77 mostram os valores percentuais nos casos dos sorteios com LHS e QMCA, respectivamente. Nas figuras destaca-se que os menores ICs percentuais foram muito próximos de 3% para os casos com sorteio LHS e QMCA, enquanto que no caso MC o menor valor ficou em torno de 3,2%. Apesar de ser uma diferença pequena na maioria dos casos o IC dos casos com sorteio MC são ligeiramente maiores que os casos com sorteio pelo LHS e QMCA, indicando que as técnicas com redução da variância têm o comportamento esperado, com uma diferença mais significativa para árvores de cenários com menos de 30 realizações por estágio.

Figura 75 - IC de 95% do *gap* de otimalidade em valores percentuais - MC.

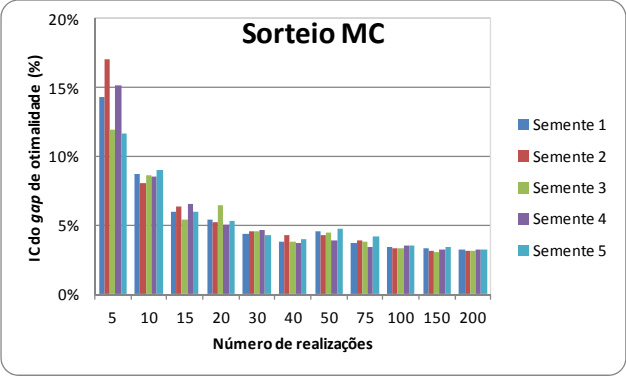


Figura 76 - IC de 95% do *gap* de otimalidade em valores percentuais - LHS.

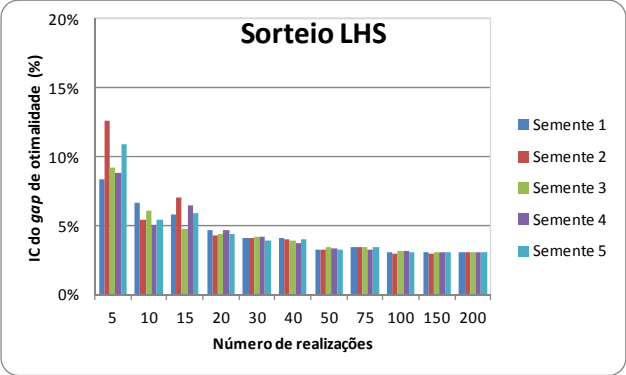
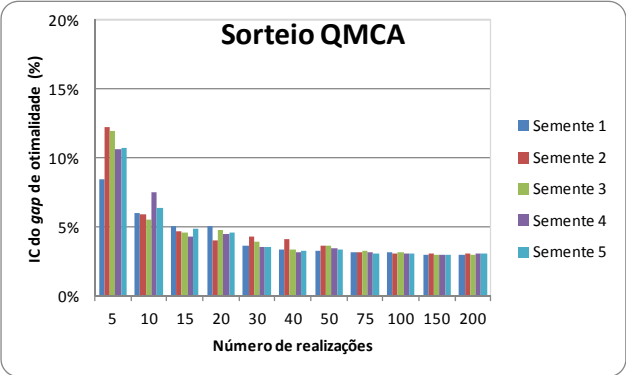
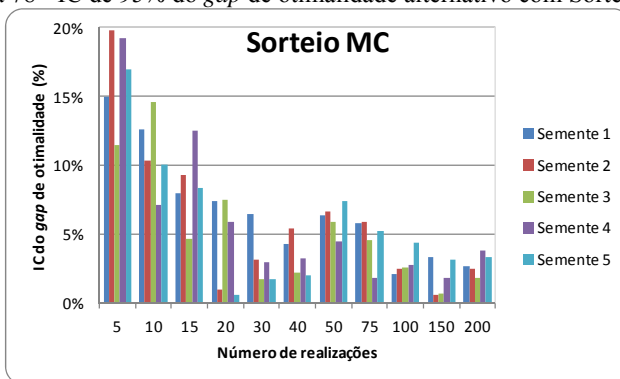


Figura 77 - IC de 95% do *gap* de otimalidade em valores percentuais - QMCA.



A Figura 78 apresenta o IC com 95% de confiança do *gap* de otimalidade, usando a metodologia alternativa para o cálculo do Limite Inferior, conforme discutido na Seção 4.4.2, nos casos com sorteio MC. Ao comparar a figura abaixo com a Figura 75 é possível verificar que o IC oscila mais no caso alternativo. Isto ocorre pelo fato de no cálculo do Limite Inferior, utiliza-se o Z_{INF} como estimador para o custo ótimo que conforme se pode observar na Figura 66 oscilou de maneira bastante significativa, mesmo para árvores de cenários com um alto número de realizações.

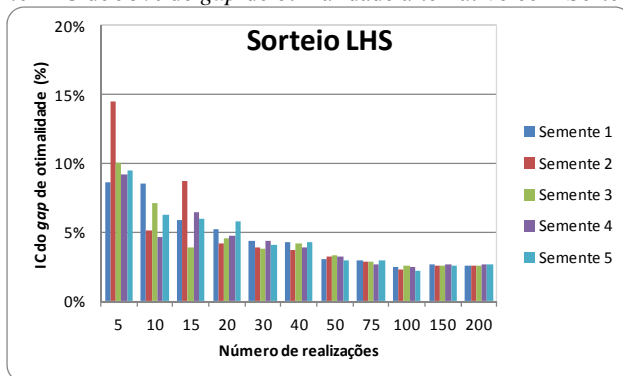
Figura 78 - IC de 95% do *gap* de otimalidade alternativo com Sorteio MC.



Na Figura 79 que mostra os casos com sorteio LHS, se nota que houve uma oscilação mais significativa nas primeiras iterações quando o Z_{INF} estava um pouco mais instável, como visto na Figura 67. Entretanto, à medida que se aumentou a árvore de cenários a oscilação diminuiu e se encontrou valores de IC ainda menores que no caso tradicional. Isto ocorre por dois motivos e ambos estão relacionados ao cálculo do Limite Inferior:

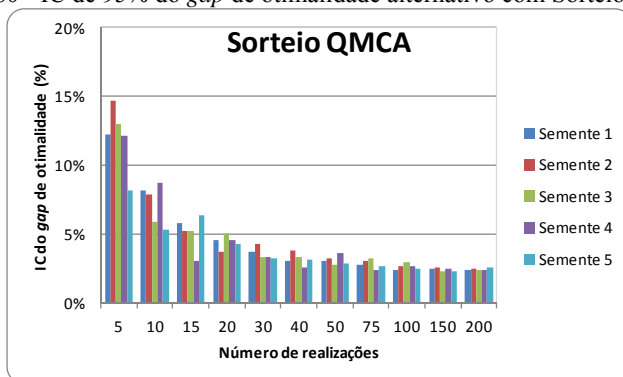
- O primeiro está relacionado com estimador para o custo ótimo que utiliza o valor do Custo Inferior (custo do primeiro estágio mais custo esperado futuro) definido em (2.39), o qual está mais próximo do custo esperado de operação do que o valor médio obtido com as 165 árvores de cenários;
- O segundo está relacionado ao cálculo do Limite Inferior propriamente dito por meio do desvio padrão, que por ser obtido pela simulação de 5000 cenários tem uma redução mais substancial ao dividir pela raiz do número de cenários, (4.33).

Figura 79 - IC de 95% do *gap* de otimalidade alternativo com Sorteio LHS.



Por fim, a Figura 80 ilustra o IC alternativo nos casos com sorteio QMCA, no qual se observa o mesmo comportamento descrito para o caso anterior com sorteio LHS.

Figura 80 - IC de 95% do *gap* de otimalidade alternativo com Sorteio QMCA.



Esta seção mostra alguns benefícios de se utilizar técnicas de redução de variância para encontrar uma política de operação de melhor qualidade para árvores de cenários menores do que seria necessário no caso com sorteio MC. No caso em estudo é possível notar que para árvores de cenários com 100 realizações ou mais os resultados do IC de 95% do *gap* de otimalidade foram bastante similares, indicando que não se tem um ganho direto em se usar árvores de cenários maiores do que 100 quando se utiliza os sorteios LHS ou QMCA. Além disso, o LHS e QMCA apresentam resultados mais estáveis para árvores de cenários menores, e podem constituir uma alternativa para realizar estudos preliminares.

5.4.3 Modelo com Aversão a Risco

Nesta seção são analisadas as metodologias de aversão a risco discutidas na Seção 4.7. Para tanto, são construídas políticas operativas para uma mesma árvore de cenários usando as duas metodologias com diferentes parâmetros. Nestes casos, a política de operação é composta por 24.000 cortes que são obtidos ao longo de 120 iterações com 200 cenários amostrados por iteração. Além disso, ressalta-se que é utilizada a seleção de cortes com nível de dominância 1 e a metodologia da PDDE em que se inicia o processo iterativo com um cenário por recursão e incrementa-se esse valor no decorrer das iterações.

Com o intuito de analisar com mais detalhes o comportamento da política nos casos com aversão a risco, esta seção será dividida em cinco etapas:

- Caso de pequeno porte com cinco estágios e duas realizações por estágio, sendo que foi utilizado apenas o fator de combinação convexa igual a 0,8 e o nível do CVaR igual a 50%;
- Horizonte com cinco anos de período de estudo (60 estágios) com 20 realizações por estágios;
- Horizonte com cinco anos de período de estudo e cinco anos de pós-operação, portanto, 120 estágios, com 20 realizações por estágio;
- Comparação para diferentes níveis de CVaR;
- Análise da metodologia de aversão a risco em uma condição crítica.

Nos duas últimas etapas as políticas são simuladas em 5000 cenários que são sorteados dentro da árvore de cenários, na qual a política é calculada. As simulações foram feitas apenas nos primeiros cinco anos (60 estágios), que é o período de interesse nessas análises, exceto na última etapa na qual a simulação foi feita ao longo dos 120 estágios.

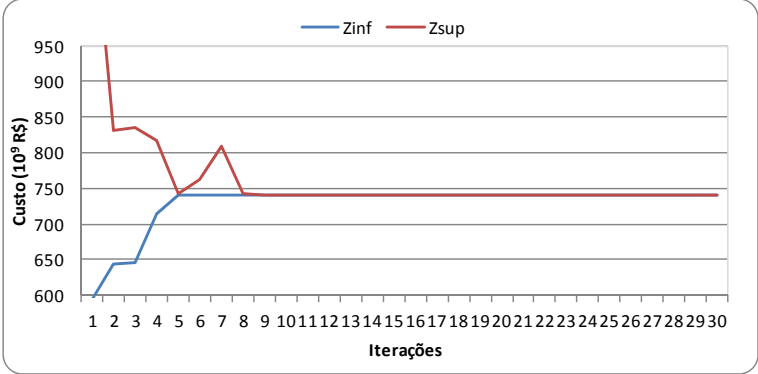
5.4.3.1 Aversão a Risco – Pequeno porte

Neste primeiro exemplo tem-se por objetivo validar a implementação das metodologias implementadas que foram apresentadas na Seção 4.7, bem como mostrar que quando ambas atingem a política ótima obtém-se resultados equivalentes para as duas implementações. Neste caso, foi considerado um problema de cinco

estágios com duas realizações (aberturas), em que todos os cenários são enumerados e visitados em todas iterações. O fator de combinação convexa escolhido foi de 0,8 com um nível de CVaR de 50%. Com isso, tem-se que apenas uma realização deverá compor o CVaR.

A Figura 81 apresenta o comportamento do Z_{INF} e Z_{SUP} para o caso em que se considerou a variável de estado adicional. Nesse caso o Z_{SUP} foi obtido pelo valor médio dos custos imediatos, que é o custo total menos a custo da FCF, e pela figura abaixo há a falsa impressão de que esse é um limite superior válido para essa metodologia.

Figura 81 - Limites Inferior e Superior no caso com Variável de Estado.



No entanto, conforme pode ser observado pela Tabela 20, na iteração 11 o Z_{SUP} ficou ligeiramente abaixo do Z_{INF} naquela mesma iteração e do custo ótimo (valor ao final das 30 iterações). Como todos os cenários foram enumerados, este exemplo mostra que, apesar do Z_{SUP} nessa implementação ser uma informação bastante interessante, pois se aproxima de um limite superior, o mesmo não pode ser definido como tal até se obter a política ótima.

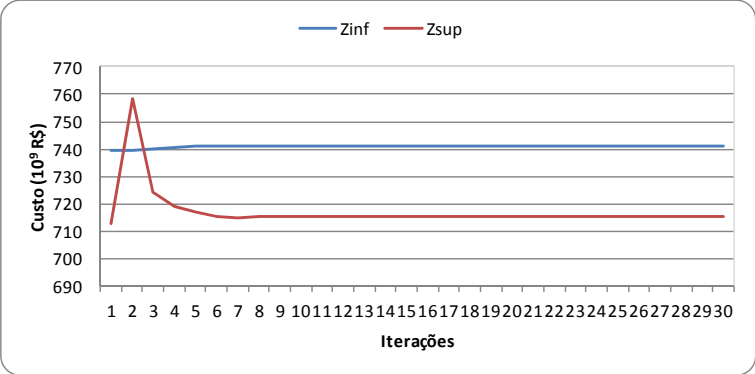
Tabela 20 - Limites Inferior e Superior com Variável de Estado (10⁹ R\$)

Iteração	Z_{INF}	Z_{SUP}	Diferença Z_{SUP} e Custo Ótimo
1	594,016	1161,903	420,719
2	644,878	831,876	90,692
3	646,714	834,929	93,745
4	713,833	817,321	76,137
5	739,825	742,001	0,817

6	739,825	762,221	21,037
7	741,069	808,955	67,771
8	741,105	741,825	0,641
9	741,119	741,311	0,127
10	741,121	741,210	0,025
11	741,168	741,161	-0,023
12	741,168	741,196	0,012
13	741,182	741,191	0,007
14	741,182	741,186	0,002
15	741,184	741,184	0,000
16	741,184	741,186	0,002
17	741,184	741,184	0,000
⋮	⋮	⋮	⋮
29	741,184	741,184	0,000
30	741,184	741,184	0,000

A Figura 82 ilustra os valores de Z_{INF} e Z_{SUP} para o caso em que a implementação foi feita com a Mudança de Probabilidade, na qual se nota que, como esperado, o valor de Z_{SUP} não está nem próximo de ser um estimador para o limite superior. Entretanto, ao se comparar com a figura anterior é possível observar que o Z_{INF} cresce substancialmente mais rápido nas primeiras iterações.

Figura 82 - Limites Inferior e Superior no caso com Mudança de Probabilidade.



Ao comparar os dois limites inferiores verifica-se que ambos atingem o mesmo valor ótimo após pelo menos 15 iterações e se mantêm no mesmo valor até a última iteração.

5.4.3.2 Aversão a Risco – 60 Estágios

Nesta etapa estuda-se o comportamento da política operativa para um horizonte de 60 estágios para os casos da Tabela 21. Como já foi comentado anteriormente, existe uma dificuldade em testar o critério de parada nessa metodologia e, portanto, o algoritmo foi parado após 120 iterações. No entanto, o Z_{INF} pode fornecer um indicativo da convergência do processo iterativo, o qual é apresentado na Figura 83 em que as linhas sólidas referem-se ao caso em que se adicionou o VaR como variável de estado, exceto a linha preta que indica o caso sem aversão a risco, enquanto que as linhas tracejadas são os resultados dos casos com a mudança de probabilidade no cálculo do corte de Benders.

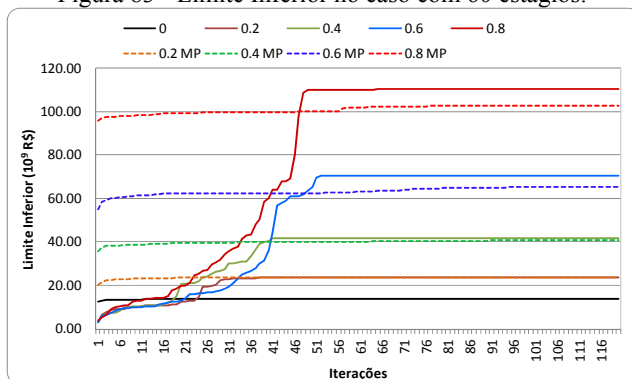
Tabela 21 - Estudos de casos para análise das metodologias de aversão a risco.

Caso	Metodologia	Combinação Convexa	Nível do CVaR(%)
0	Nenhuma	0	-
0.2	Variável de estado	0,2	10
0.4	Variável de estado	0,4	10
0.6	Variável de estado	0,6	10
0.8	Variável de estado	0,8	10
0.2 MP	Mudança de Probabilidade	0,2	10
0.4 MP	Mudança de Probabilidade	0,4	10
0.6 MP	Mudança de Probabilidade	0,6	10
0.8 MP	Mudança de Probabilidade	0,8	10

Conforme pode ser observado na Figura 83, assim como na análise anterior, o limite inferior do caso com mudança de probabilidade foi significativamente maior do que o caso com variável de estado nas primeiras iterações, porém ao final do processo iterativo o Z_{INF} do caso com variável de estado foi maior do que o caso com mudança de probabilidade. Este aspecto é bastante intrigante, pois o limite inferior

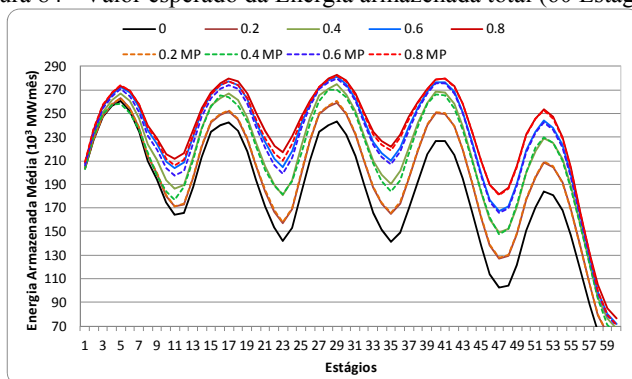
nos casos com variável de estado teve um comportamento diferente do que é comumente encontrado em problemas neutro a risco, com alguns saltos ao longo do processo iterativo.

Figura 83 - Limite Inferior no caso com 60 estágios.



A Figura 84 ilustra o valor médio da energia armazenada total (soma de todos os REEs). Pela figura abaixo se nota que quanto maior for o nível de aversão a risco maior é o nível de armazenamento dos reservatórios. Este é um dos resultados mais importantes, uma vez que em problemas de planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos, em geral, deseja-se proteger contra cenários de baixa afluência, sendo a elevação dos níveis de armazenamento uma das principais possibilidades de proteção.

Figura 84 - Valor esperado da Energia armazenada total (60 Estágios).



É importante destacar na figura anterior que os valores de armazenamento para ambas as metodologias com o fator de combinação

convexa igual a 0,2 é praticamente o mesmo. Contudo, apesar dos casos com o fator de 0,6 e 0,8 terem armazenamentos ligeiramente diferentes para as duas metodologias no início do horizonte, esses valores tornam-se bem parecidos ao final do horizonte.

O aumento do armazenamento reduz a probabilidade de risco de déficit, bem como a Energia Esperada Não Suprida (EENS). O primeiro fato pode ser observado na Figura 85, na qual se verifica que há uma redução significativa no risco de déficit à medida que se elevou o nível de aversão a risco. Vale destacar que o Caso 0.4 MP é o único em que há um risco de déficit maior em relação a níveis menores de aversão a risco, sendo que este aumento no risco de déficit ocorreu no último ano do horizonte em função do efeito da fronteira e não faz parte do período de interesse em estudos de planejamento. Dessa forma, esse comportamento pode ser consequência de políticas operativas que ainda não convergiram para o valor ótimo e, com isso, em alguns poucos cenários os reservatórios chegaram ao final do horizonte com menos energia armazenada do que seria necessário.

A EENS é mostrada na Figura 86, na qual nota-se uma redução bastante relevante mesmo para níveis baixos de aversão a risco. É importante destacar que os casos 0.8 e 0.8 MP foram os únicos em que a EENS foi nula em todos os 60 estágios e, portanto, o risco de déficit também foi nulo para todos os anos. Vale ressaltar que no Caso 0.4 MP em que se observou a existência de riscos de déficits no último ano, o valor da EENS foi bem inferior ao observado no caso sem aversão a risco indicando que os déficits que ocorreram foram de baixa profundidade.

Figura 85 - Probabilidade de risco de déficit anual (60 Estágios).

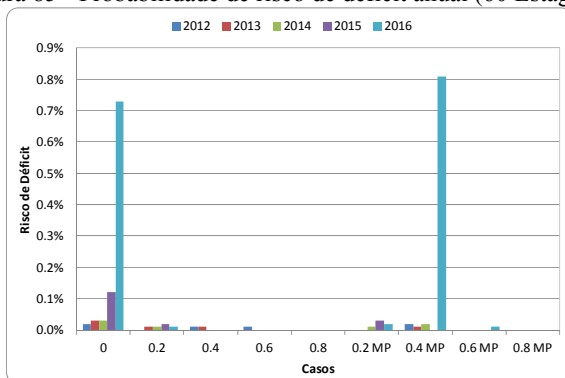
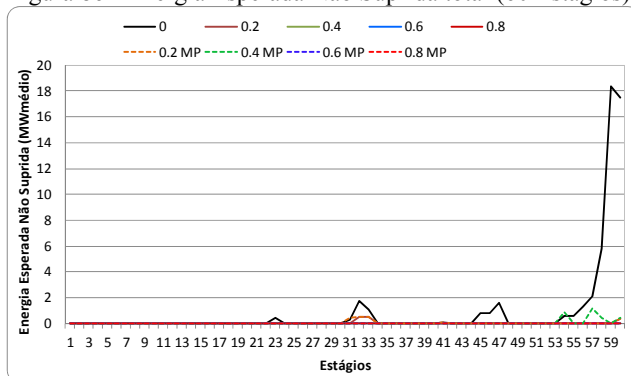
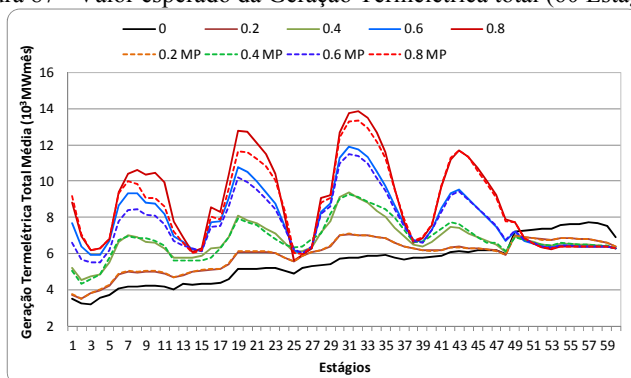


Figura 86 - Energia Esperada Não Suprida total (60 Estágios).



Entretanto, o aumento do armazenamento e a redução do risco de déficit implicam em um custo de operação maior na maioria dos cenários, visto que em média faz-se necessário despachar uma quantidade maior de UTEs para atender a demanda. Isto pode ser observado na Figura 87 que apresenta a geração termelétrica total média para cada estágio do horizonte de estudo. Pela figura abaixo, é possível verificar que a geração termelétrica cresce rapidamente com o fator de combinação convexa, sendo que os casos com o VaR como variável de estado com fator de combinação convexa de 0,6 e 0,8 apresentaram resultados diferentes em relação aos casos com a mudança de probabilidade no primeiro ano.

Figura 87 - Valor esperado da Geração Termelétrica total (60 Estágios).

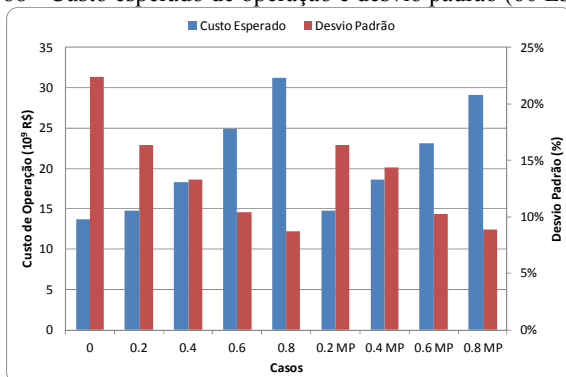


Conforme pode ser observado na figura acima, a geração termelétrica cresceu de maneira mais significativa nos períodos de baixa afluência do Subsistema Sudeste/Centro-Oeste, i.e., entre Maio e

Novembro, para proteger o sistema contra um período seco quando deveria ser úmido. Além disso, ressalta-se que ao final do horizonte a geração termelétrica é menor nos casos com aversão a risco do que sem aversão, pois não há futuro após o horizonte de estudo e o armazenamento era superior nos casos com aversão a risco que puderam utilizar mais geração hidrelétrica ao fim do período de estudo.

As consequências da geração termelétrica adicional podem ser vistas na Figura 88 que ilustra o custo total esperado de operação e o desvio padrão do custo total de operação para os 60 estágios em estudo. Conforme esperado, o custo esperado de operação cresce com o nível de aversão a risco, por outro lado o desvio padrão, em percentual do custo esperado de operação, diminui em relação ao caso sem aversão a risco indicando que o nível de geração termelétrica é mais parecido entre os cenários quando se é avesso a risco.

Figura 88 - Custo esperado de operação e desvio padrão (60 Estágios).

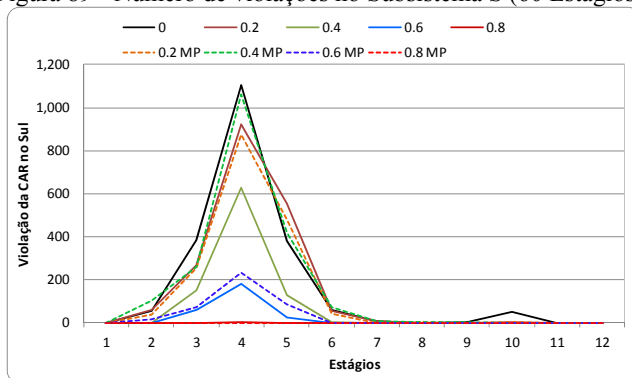


Em problemas de planejamento de sistemas hidrotérmicos uma estratégia comum para proteger contra cenários com baixas afluências é definir uma zona de armazenamento de segurança, sendo que se adiciona uma penalidade para quando armazenamento for menor que o valor definido. No caso Brasileiro, utiliza-se uma Curva de Aversão a Risco (CAR) (KLIGERMAN *et al.*, 2005). Assim, um aspecto importante de ser analisado é o número de cenários nos quais o armazenamento é menor do que o definido pela CAR, que no caso de Janeiro/2012 é apenas para o primeiro ano.

Nesse sentido, a Figura 89 apresenta o número de violações da CAR no Subsistema Sul (S) considerando os 5.000 cenários, na qual se nota que em todos os casos os valores são bastante baixos exceto nos meses de Março a Maio, sendo que para combinações convexas acima

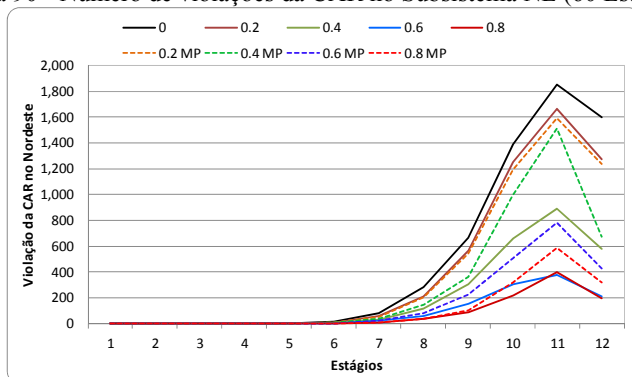
de 0,6 os valores de pico tiveram uma redução bastante significativa. No Subsistema Sudeste/Centro-Oeste (SE/CO) o número de violações foi nulo.

Figura 89 - Número de violações no Subsistema S (60 Estágios).



No Subsistema Nordeste (NE) é onde ocorre a maior quantidade de violações como pode ser visto pela Figura 90. Nesta, se destaca que o número de violações é sempre menor quando a metodologia de aversão a risco foi empregada no cálculo da política. Além disso, é importante lembrar que no Subsistema Norte não há CAR, assim, a zona de segurança é nula.

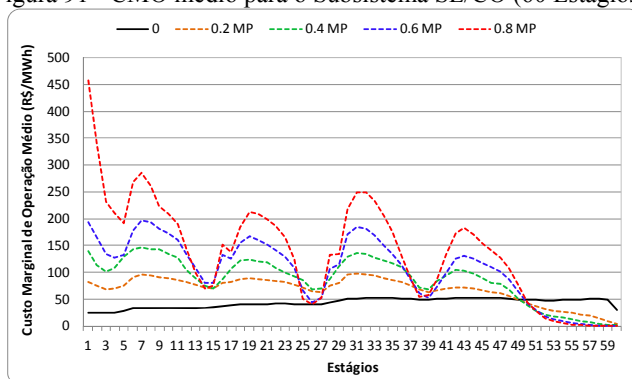
Figura 90 - Número de violações da CAR no Subsistema NE (60 Estágios).



Por fim, apresenta-se na Figura 91 uma informação importante para o problema do PEN, os Custos Marginais de Operação (CMOs), visto que esses formam o preço do mercado de curto prazo, i.e., o Preço de Liquidação de Diferenças (PLDs). Os CMOs são, em geral, definidos

como os multiplicadores de Lagrange, ou preço sombra, associado à restrição de atendimento à demanda. Entretanto, quando se utiliza aversão a risco com a adição do VaR como variável de estado, a função objetivo fica poluída e o multiplicador de Lagrange não pode ser mais utilizado para encontrar o CMO. Por isso, existe uma grande vantagem para a metodologia de mudança das probabilidades, na qual o CMO permanece igual ao multiplicador de Lagrange.

Figura 91 - CMO médio para o Subsistema SE/CO (60 Estágios).



Pela figura acima se verifica um comportamento muito similar à geração termelétrica total. Isto é esperado, uma vez que o CMO é definido pelo recurso que será despachado quando a demanda aumentar em 1MWmês. Assim, quanto maior for a geração termelétrica, mais caro será o recurso disponível para atender o aumento da demanda.

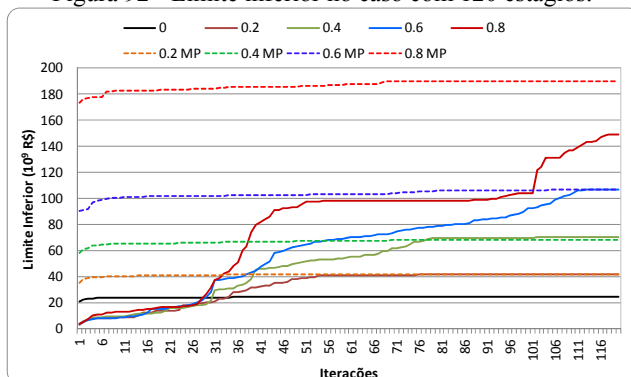
5.4.3.3 Aversão a Risco – 120 Estágios

Nesta etapa estuda-se a política operativa para um horizonte de 120 estágios para os casos da Tabela 21, que conforme será observado teve um comportamento similar ao encontrado nos casos anteriores. Assim, esta seção dará destaque principalmente aos aspectos que são diferentes em comparação com a anterior.

A Figura 92 apresenta o limite inferior, na qual se nota que assim como nos casos com 60 estágios nas primeiras iterações o Z_{INF} , para os casos com mudança de probabilidade foi superior aos casos em que se adicionou a variável de estado. Entretanto, nota-se que não ocorreu a mesma ultrapassagem que na Figura 83, sendo que no Caso 0.8 o limite inferior no caso com variável de estado ficou bastante abaixo do valor com mudança de probabilidade. Com isso, tem-se um indicativo forte de

que a política operativa do Caso 0.8 não estabilizou, mesmo após 120 iterações.

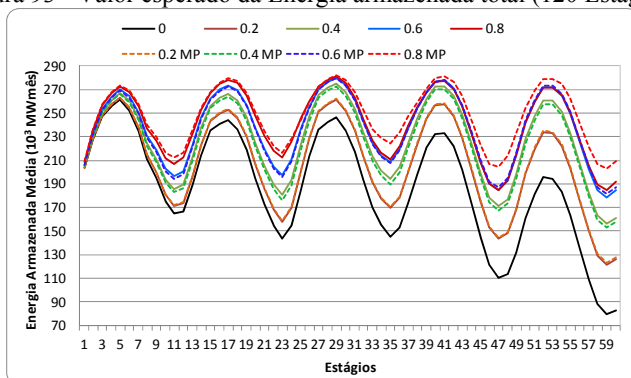
Figura 92 - Limite inferior no caso com 120 estágios.



É importante ressaltar que a análise da figura acima não garante que o critério de parada seria aceito após 120 iterações, porém é possível verificar que o aumento no horizonte de estudo teve um impacto bastante relevante nos casos com aversão a risco quando foi utilizada a variável de estado. Além disso, na Figura 92 se nota que quanto maior for o nível de aversão a risco mais lenta é a convergência para ambas as metodologias.

A Figura 93 ilustra o valor médio da energia armazenada total, na qual se observa que quanto maior for o nível de aversão a risco maior é o nível de armazenamento dos reservatórios. Na figura se destaca que os valores de armazenamento para ambas as metodologias com o fator de combinação convexa igual a 0,2 a 0,6 é praticamente o mesmo. Contudo, apesar dos casos com o fator de 0,8 terem armazenamentos parecidos para as duas metodologias no início do horizonte, esses valores tornam-se bem diferentes ao final do horizonte. Neste caso o final do horizonte é de interesse prático, uma vez que se têm cinco anos de pós-operação para reduzir o efeito da fronteira. Essa diferença ocorre devido ao fato do Caso 0.8 (com variável de estado) não estar próximo da convergência, sendo que a mesma pode ser verificada nos demais resultados também.

Figura 93 - Valor esperado da Energia armazenada total (120 Estágios).



O aumento do armazenamento reduz a probabilidade de risco de déficit, bem como a Energia Esperada Não Suprida (EENS) na maioria dos casos. O primeiro fato pode ser observado na Figura 94, na qual se verifica que há uma redução significativa no risco de déficit à medida que se elevou o nível de aversão a risco. Vale destacar que os casos com fator de combinação convexa igual a 0,2 a 0,6 obtiveram perfis risco de déficits diferentes para as duas implementações, mas como pode ser visto nas demais análises os resultados foram bastante parecidos. Assim, a diferença observada decorre do fato que apesar da modelagem do problema ser a mesma, as políticas operativas são diferentes. Além disso, se ressalta que o Caso 0.8 MP houve um déficit preventivo no primeiro ano, que pode ser em função do elevado nível de aversão a risco ou da política não ter convergido para o ponto desejado ainda.

A EENS é mostrada na Figura 95, na qual nota-se uma redução bastante relevante mesmo para baixos níveis de aversão a risco. É importante destacar o Caso 0.8 MP em que houve um déficit preventivo no início do horizonte de estudo ou a política ainda não estabilizou. Vale ressaltar que os valores de risco de déficit e EENS foram baixos mesmo para o caso sem aversão a risco, sendo que isto pode ser devido ao modelo independente que não tem, em geral, períodos úmidos e secos de longa duração.

Figura 94 - Probabilidade de risco de déficit anual (120 Estágios).

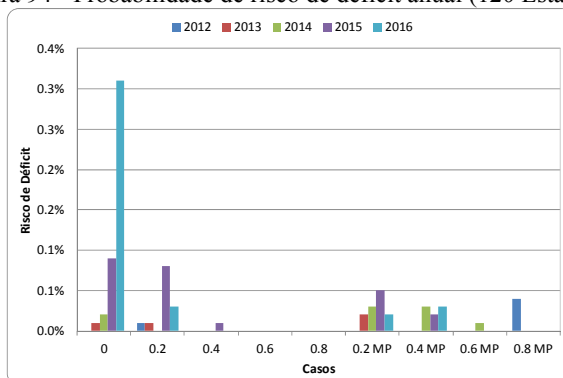
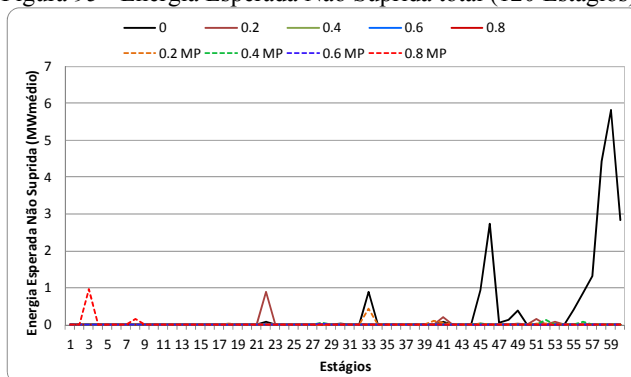
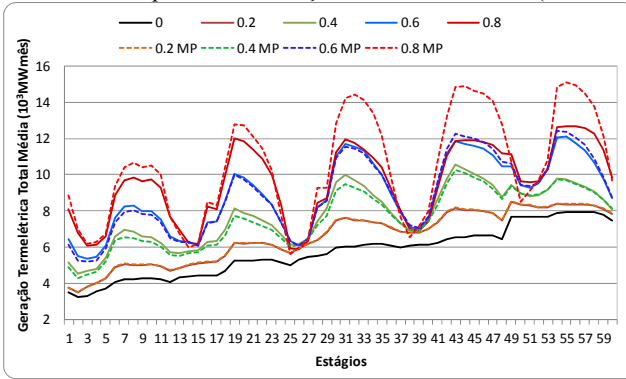


Figura 95 - Energia Esperada Não Suprida total (120 Estágios).



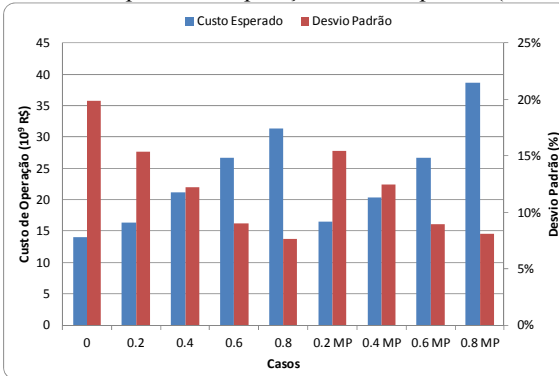
O aumento do armazenamento e a redução do risco de déficit implicaram em um custo de operação maior na maioria dos cenários, visto que em média faz-se necessário despachar uma quantidade maior de UTEs para atender a demanda. Isto pode ser observado na Figura 96 que apresenta a geração termelétrica total média para cada estágio do horizonte de estudo. Pela figura abaixo, é possível verificar que a geração termelétrica cresce rapidamente com o fator de combinação convexa assim como no caso com 60 estágios, sendo que os casos fator entre 0,2 e 0,6 apresentaram resultados médios bastante similares enquanto que os casos com 0,8 tiveram comportamento bem diferente conforme comentado anteriormente.

Figura 96 - Valor esperado da Geração Termelétrica total (120 Estágios).



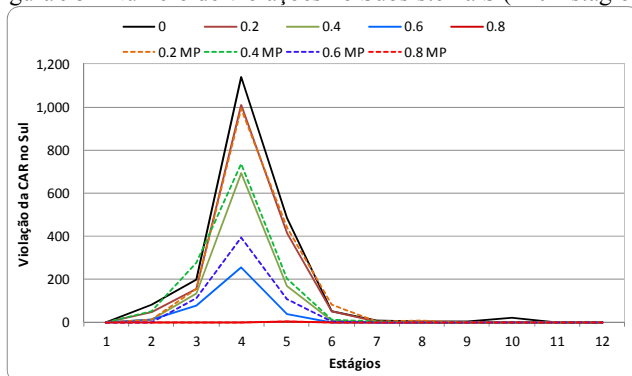
As consequências da geração termelétrica adicional podem ser vistas na Figura 97 que ilustra o custo total esperado de operação e o desvio padrão do custo total de operação para os 60 estágios em estudo. Conforme esperado, o custo esperado de operação cresce com o nível de aversão a risco, por outro lado o desvio padrão, em percentual do custo esperado de operação, diminui assim como no estudo com 60 estágios.

Figura 97 - Custo esperado de operação e desvio padrão (120 Estágios).



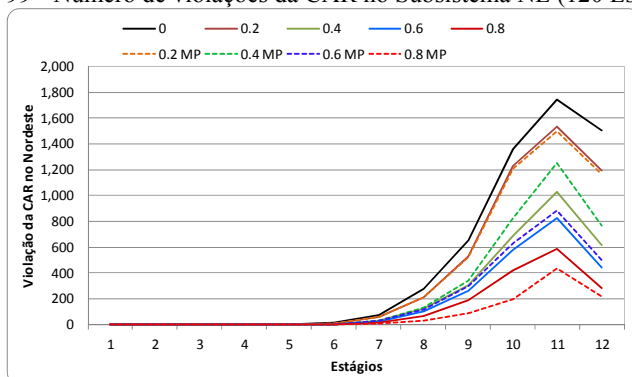
Da mesma forma que no estudo anterior, avalia-se o número de violações da CAR no subsistema Sul considerando os 10.000 cenários, o qual é mostrado na Figura 98 em que se nota uma redução no número de violações quando se considera a aversão a risco.

Figura 98 - Número de violações no Subsistema S (120 Estágios).



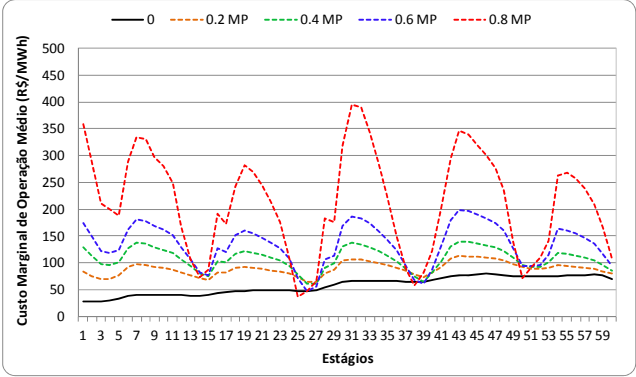
No Subsistema Nordeste é onde ocorre a maior quantidade de violações como pode ser visto pela Figura 99. Nesta, se destaca que o número de violações é sempre menor quando a metodologia de aversão a risco foi empregada no cálculo da política.

Figura 99 - Número de violações da CAR no Subsistema NE (120 Estágios).



Por fim, apresenta-se na Figura 100 os CMOs para o Subsistema SE/CO apenas para os casos com mudança de probabilidade, tal qual no estudo com 60 estágios. Pela figura acima se verifica um comportamento muito similar à geração termelétrica total.

Figura 100 - CMO médio para o Subsistema SE/CO (120 Estágios).



5.4.3.4 Comparação para diferentes níveis de CVaR

Neste ponto serão discutidos resultados para dois níveis de CVaR, que nos casos anteriores são fixados em 10%. Assim é possível analisar de maneira simplificada o impacto da variação do nível de CVaR na política de operação. Para tanto, são rodados casos para os mesmos quatro fatores da combinação convexa (0,2; 0,4; 0,6 e 0,8) com um nível de CVaR igual a 50% com a metodologia de mudança de probabilidade e horizonte de 120 estágios. Dessa forma, para um mesmo fator de combinação convexa, o caso com 50% a política de operação será menos avessa a risco que o caso com 10%. A Tabela 22 resume os casos que serão analisados.

Tabela 22 - Casos para comparação dos níveis de CVaR.

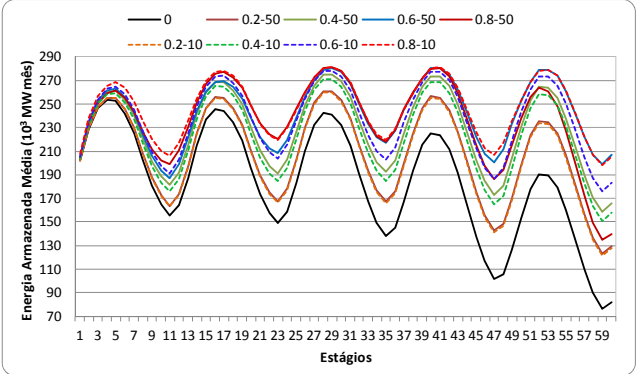
Caso	Metodologia	Combinação Convexa	Nível do CVaR(%)
0	Nenhuma	0	-
0.2-50	Mudança de probabilidade	0,2	50
0.4-50	Mudança de probabilidade	0,4	50
0.6-50	Mudança de probabilidade	0,6	50
0.8-50	Mudança de probabilidade	0,8	50
0.2-10	Mudança de probabilidade	0,2	10
0.4-10	Mudança de probabilidade	0,4	10

0.6-10	Mudança de probabilidade	0,6	10
0.8-10	Mudança de probabilidade	0,8	10

Os resultados têm um comportamento bastante similar ao observado na análise em que é feita a comparação entre as duas metodologias para inclusão da aversão a risco na PDDE, i.e., à medida que se aumenta o nível de aversão a risco tem-se um armazenamento maior e, conseqüentemente, uma geração termelétrica e um custo de operação mais elevado. Dessa forma, de maneira a não ficar muito repetitivo são mostrados um conjunto de resultados menor que é suficiente para acompanhar as conseqüências de se alterar o nível do CVaR.

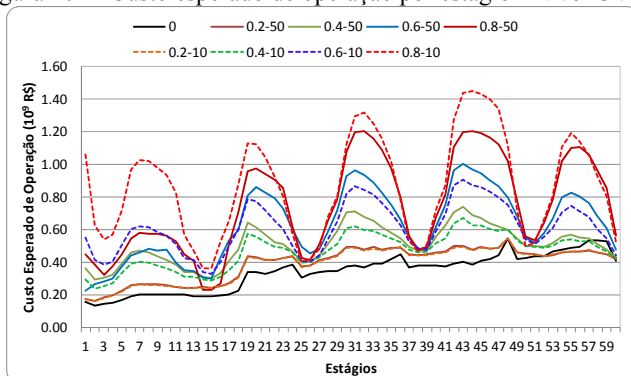
A Figura 101 ilustra os níveis de armazenamento médio para os casos apresentados na Tabela 22, na qual se ressalta que as linhas contínuas referem-se ao caso com níveis de CVaR igual a 50% e as linhas tracejadas igual a 10%, para os diferentes valores do fator de combinação convexa. Como esperado, nota-se na figura que a energia armazenada média é maior para o caso com nível de CVaR de 10% do que com 50% para um mesmo fator de combinação convexa.

Figura 101 - Energia armazenada total média - Nível CVaR.



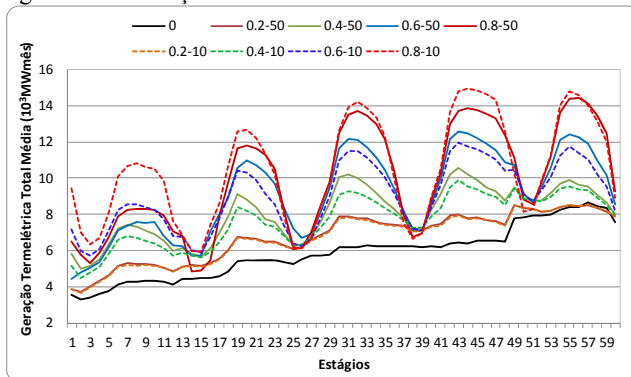
Além disso, pela figura acima, é interessante destacar que os casos 0.4-50 e 0.2-10 apresentaram praticamente os mesmos valores médios. Esse comportamento é bastante consistente quando se observa o custo esperado de operação para cada estágio, mostrado na Figura 102.

Figura 102 - Custo esperado de operação por estágio - Nível CVaR.



Na figura acima é possível observar que para um mesmo fator de combinação convexa o custo de operação nos estágios de menor afluência reduziu significativamente para um nível de CVaR de 50%. Isto indica que a geração termelétrica não é acionada na mesma intensidade que nos casos com CVaR de 10%, fato que pode ser confirmado pela Figura 103.

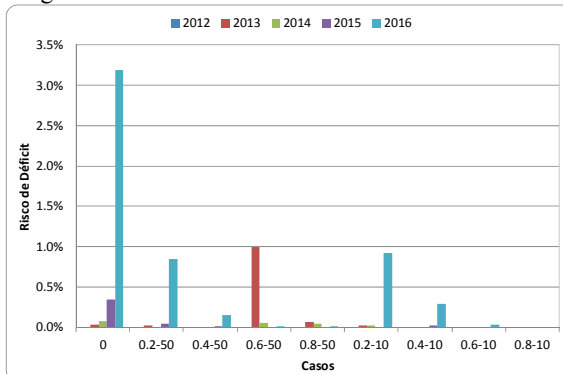
Figura 103 - Geração termelétrica total média - Nível de CVaR.



Como a geração termelétrica é menos acionada nos casos com CVaR de 50%, a geração hidrelétrica é maior para atender a demanda e, consequentemente, o armazenamento é menor como visto na Figura 101. Com isso, esperava-se um risco de déficit substancialmente maior, porém, conforme ilustrado pela Figura 104, não tem diferenças tão relevantes. Isto indica que níveis de CVaR na ordem de 10% produzem políticas de operação tão pessimistas que aumentam a geração

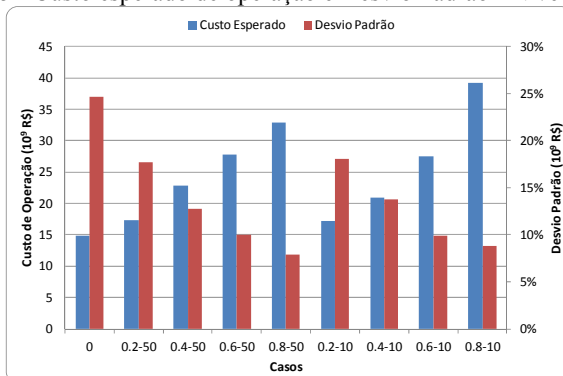
termelétrica significativamente para evitar déficit em alguns poucos cenários a mais.

Figura 104 - Risco de déficit anual - Nível de CVaR.



Como resultado, os casos com nível de CVaR de 50% apresentam um custo total de operação médio inferior ao caso com 10%, conforme pode ser observado na Figura 105. Na figura abaixo, se destaca que no caso com CVaR de 10% ao aumentar o fator da combinação convexa o custo esperado de operação cresce rapidamente, enquanto que os casos com CVaR de 50% esse aumento é mais moderado.

Figura 105 - Custo esperado de operação e Desvio Padrão - Nível de CVaR.



Dessa forma, este conjunto de resultados mostra que a política de operação é bastante sensível ao nível de CVaR, porém há uma correlação entre os dois parâmetros da MCR, uma vez que como foi destacado no início da seção os casos 0.4-50 e 0.2-10 apresentam

resultados bastante similares não havendo muita diferença entre as políticas.

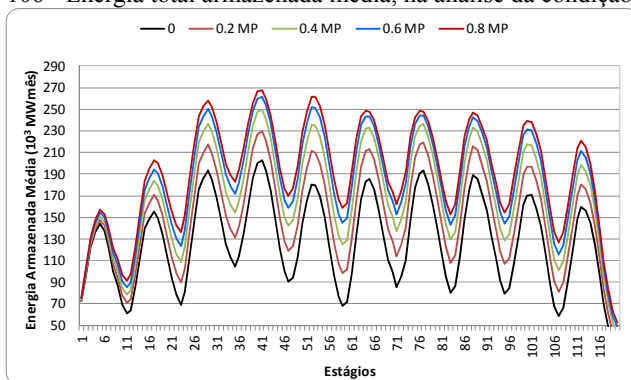
5.4.3.5 Aversão a risco em uma condição crítica

Conforme observado nas análises anteriores, a metodologia de aversão a risco aumenta o nível do reservatório para reduzir o risco de falta de energia. No entanto, como o risco de falta de energia é baixo o uso de metodologias com aversão a risco pode não ser muito evidente, assim, esta análise tem por objetivo verificar o comportamento dos resultados quando se tem uma condição crítica. Para tanto, considerou-se que o armazenamento inicial dos reservatórios igual a 15%, 15%, 15% e 25% da energia armazenável máxima dos subsistemas SE/CO, S, NE e N, respectivamente. Adicionalmente, considera-se a demanda 5% maior para todos os estágios do horizonte de estudo.

A análise foi realizada considerando apenas a metodologia com a Mudança de Probabilidade, com um nível de CVaR de 50% e o fator de combinação convexa assumindo os valores de 0; 0,2; 0,4; 0,6 e 0,8. Optou-se por um nível de CVaR maior, visto que para a condição crítica um valor pequeno tornaria o problema muito crítico para valores altos do fator de combinação convexa. Por outro lado, como foi mostrado na análise anterior, poderia ser mantido o nível de CVaR em 10% com fatores de combinação convexa mais próximos a zero.

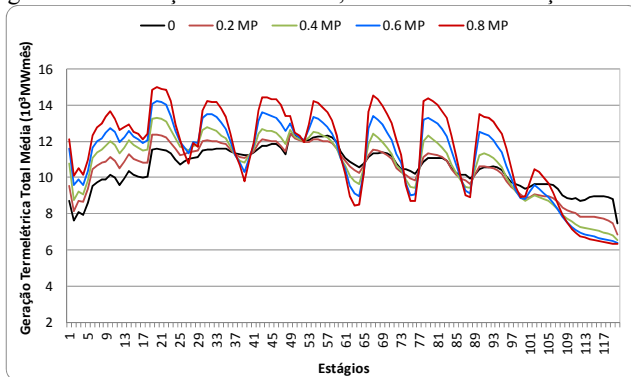
Destaca-se, também, que nesta análise a simulação foi realizada em todo o horizonte de estudo (120 estágios) para ser possível analisar as consequências no futuro. Assim, inicialmente, a Figura 106 ilustra o armazenamento total médio, no qual se observa que o armazenamento inicial é bastante baixo e aumenta rapidamente à medida que se incrementa o nível de aversão a risco.

Figura 106 - Energia total armazenada média, na análise da condição crítica.



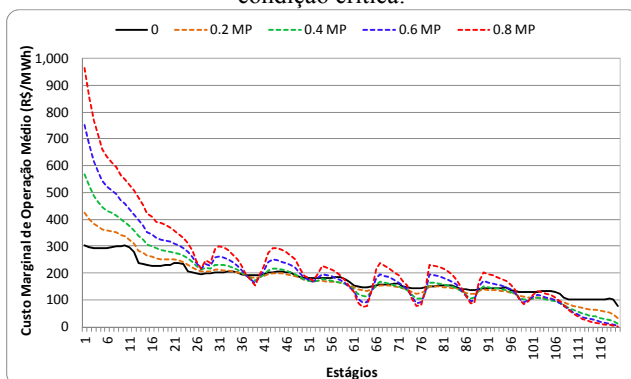
O aumento do armazenamento é uma consequência de um valor da água mais alto que tem por consequência um despacho termelétrico maior, como pode ser observado na Figura 107. É interessante notar que depois que os níveis de armazenamento se estabilizam, entre os estágios 60 e 90 aproximadamente, a geração termelétrica é menor nos casos com aversão a risco no período de chuvas no SE/CO e maior no período seco. Assim, entre períodos tem-se uma oscilação maior da geração termelétrica quanto maior for o nível de aversão a risco.

Figura 107 - Geração Termelétrica, na análise da condição crítica.



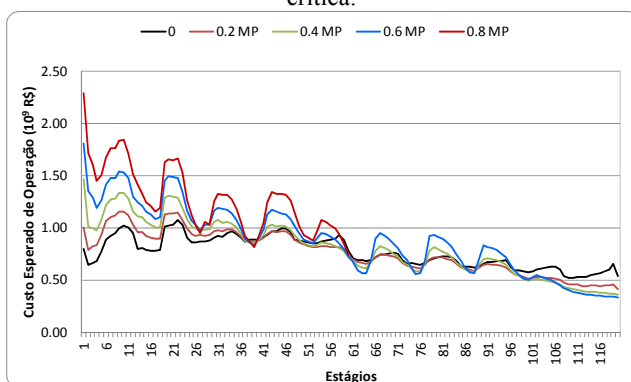
Como consequência, tem-se um comportamento do CMO médio no SE/CO bastante similar com a geração termelétrica, conforme ilustrado pela Figura 108.

Figura 108 - Custo Marginal de Operação médio do SE/CO, na análise da condição crítica.



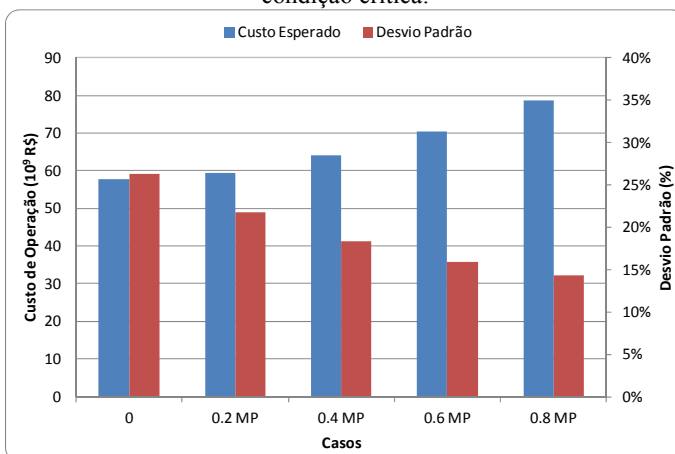
O aumento da geração termelétrica provoca um incremento não só no CMO, mas também no custo de operação em cada estágio que é apresentado pela Figura 109. Nota-se, pela figura, que apesar de um custo significativamente mais alto nos primeiros estágios, no período em que há uma estabilização do armazenamento os custos operativos oscilam entre os períodos úmidos e secos seguindo a tendência da geração termelétrica.

Figura 109 - Custo esperado de operação por estágio, na análise da condição crítica.



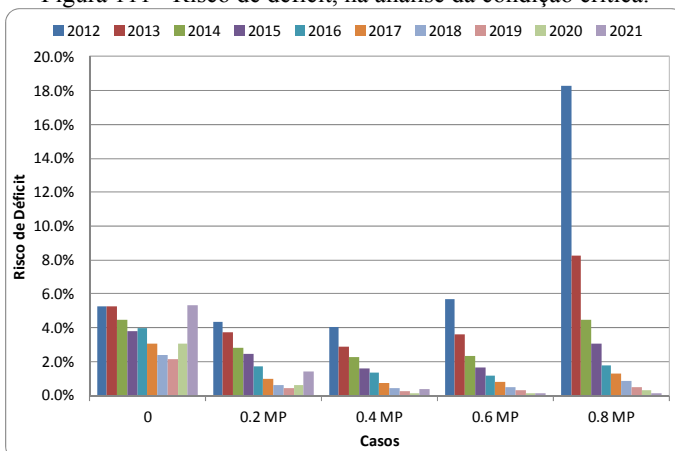
Com o aumento do custo de operação em cada estágio, verifica-se pela Figura 110 um aumento do custo total esperado de operação à medida que se incrementa o nível de aversão a risco. No entanto, o desvio padrão diminui com o nível de aversão a risco, indicando que as decisões tomadas tende a ser mais próxima entre os cenários.

Figura 110 - Custo esperado de operação e desvio padrão, na análise da condição crítica.



Os aspectos citados são bastante importantes para avaliar o comportamento da política operativa com os diferentes níveis de aversão a risco. Um dos resultados mais relevantes é o risco de déficit que pode ser observado na Figura 111, na qual se nota que há uma redução do risco de déficit com o aumento do nível de aversão a risco.

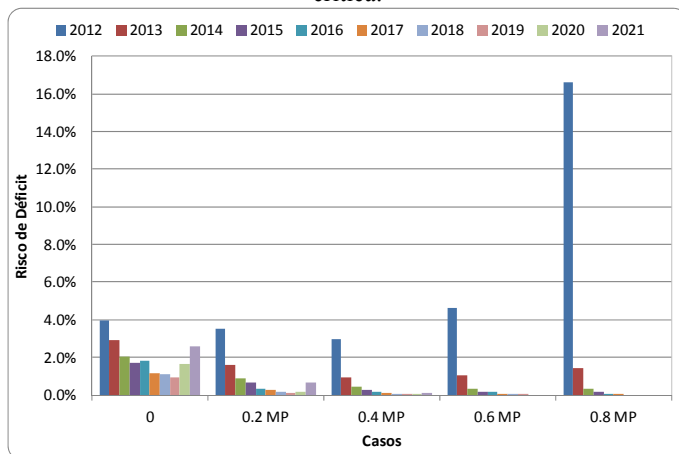
Figura 111 - Risco de déficit, na análise da condição crítica.



Entretanto, é possível verificar que nos casos 0.6 MP e 0.8 MP ocorrem um aumento do risco de déficit. Conforme discutido no início dessa seção o déficit é definido em quatro patamares com custos incrementais diferentes, sendo que a Figura 111 apresenta o risco de

ocorrer qualquer déficit por menor que seja. Assim, a Figura 112 ilustra o risco de ocorrer um déficit maior que 5% da demanda total do sistema.

Figura 112 - Risco de déficit acima de 5% da demanda, na análise da condição crítica.



Na figura acima, nota-se que houve uma redução ainda mais significativa da ocorrência de déficit com elevada profundidade, exceto para o primeiro ano nos casos 0.6 MP e 0.8 MP que optaram por cortar mais carga no primeiro em detrimento dos demais. Isto ocorre porque do ponto de vista de uma política com alto índice de aversão a risco vale a pena sacrificar o primeiro ano, para obter nove anos com uma maior segurança para os cenários mais críticos. Dessa forma, é importante destacar que a escolha do nível de aversão a risco é de fundamental importância de acordo com o comportamento desejado. Neste caso, considerando as combinações estudadas, o resultado mais adequado é o Caso 0.4 MP.

5.5 CONCLUSÃO

Neste capítulo são apresentadas as principais informações para as duas configurações do SIN, que são utilizadas nas análises feitas nesse capítulo. Para a configuração de Janeiro/2009 são feitos dois estudos, o primeiro consiste na validação da implementação e avaliação dos problemas encontrados na formulação do PEN e, no segundo, discute-se a inclusão do nó fantasma. Com a configuração de Janeiro/2012 são feitas três análises, a primeira estuda-se estratégias para melhorar o desempenho da PDDE, na segunda faz-se uma avaliação da qualidade

da política de operação e, por fim, analisam-se as metodologias de aversão a risco.

A validação do modelo computacional é feita para um caso pequeno, que permite a enumeração de todos os cenários da árvore. Nesse caso, sabe-se que os limites superior e inferior devem ser o muito próximos quando o algoritmo convergir e que o Z_{INF} não pode ultrapassar o Z_{SUP} de maneira significativa. Dessa forma, torna-se possível avaliar se a PDDE convergiu para uma política de operação adequada, uma vez que, se o limite inferior ultrapassar o superior sabe-se que existe alguma inconsistência na implementação ou na modelagem do problema. Assim, ao enumerar todos os cenários permite-se analisar os impactos das não linearidades dos atributos do REE e do modelo $ARP(p)$ na política de operação calculada pela PDDE.

De maneira a resolver os aspectos problemáticos na formulação, avaliaram-se as propostas apresentadas no Capítulo 4. As soluções propostas para o modelo de geração da árvore de cenários são apenas satisfatórias, visto que ambas as soluções, modelo $ARP(p)$ com Λ^{MAX} e independente, apesar de produzirem soluções coerentes, ambos não atendem completamente os requisitos necessários. O modelo $ARP(p)$ com Λ^{MAX} não permite re-amostragem a cada iteração; caso contrário, poderá gerar valores de Energias Afluentes negativos. No caso de um conjunto grande de cenários, o valor de Λ^{MAX} teria que ser muito elevado para garantir valores positivos e, com isso, os momentos estatísticos do histórico não são reproduzidos pelo modelo $ARP(p)$ com Λ^{MAX} . O modelo independente resolve a maior parte das dificuldades e consegue reproduzir os três primeiros momentos estatísticos, mas não tem a capacidade de gerar séries temporais de acordo com o histórico.

Por outro lado, as sugestões para resolver os aspectos problemáticos do REE são simples e eficazes, embora tenha sido necessário ignorar as Perdas de Energia Fio d'Água. O Fator de Correção de Energia Controlável só pode ser usado nos casos em que a Energia Afluente não seja variável de estado (modelo independente). Verificou-se que as não linearidades podem tornar o problema não convexo e, portanto, o algoritmo da PDDE não deveria ser utilizado.

Na sequência, considerando o primeiro estágio como estocástico, em vez de determinístico, são realizadas análises para verificar a metodologia mais adequada para o cálculo do limite inferior. Para tanto, considera-se um modelo linear (REE linear e modelo independente de Energias Afluentes) de pequeno porte, que permite enumerar todos os cenários. Nesse estudo são avaliados dois casos enumerando todos os

cenários e dois casos em que é sorteado, a cada iteração, um número de cenários menor que o número total de cenários. Com os resultados dos quatro casos, mostra-se que, quando o primeiro estágio é considerado estocástico e não seja possível enumerar todos os cenários da árvore, deve-se incluir um nó fantasma para proceder corretamente com o cálculo do limite inferior.

Uma das principais justificativas para o uso da modelagem das UHEs por REEs é o esforço computacional que se exige para calcular uma política de boa qualidade. No entanto, mostra-se neste trabalho que ao aplicar algumas estratégias de solução da PDDE e seleção de cortes de Benders o tempo computacional é reduzido de maneira bastante substancial, com ganhos de até 16 vezes em relação à PDDE tradicional sem perder a qualidade da política de operação, conforme verificado nos estudos. Isto aponta para a possibilidade de refinar a representação das UHEs no PEN ao aumentar o número de REEs ou considerar a representação individualizada.

São analisadas três estratégias de solução da PDDE e três metodologias de seleção de cortes, que totalizaram 21 estudos de casos. Nestes a combinação da estratégia que inicia o processo iterativo com um cenário por recursão e aumenta esse valor a cada iteração com a seleção de cortes por nível de dominância igual a um é considerada a de melhor desempenho para a configuração em estudo. Por este motivo, a avaliação da política de operação é feita com políticas operativas obtidas com essa estratégia de cálculo da política.

A avaliação da política operativa é feita considerando 11 possibilidades de árvore de cenários, com diferentes números de realizações por estágio, com cinco sementes para cada uma das três técnicas de amostragem (MC, LHS e QMCA). Nos resultados se observa que a partir de 100 realizações por estágio existe pouca variação do custo esperado de operação e do IC com 95% de confiança do *gap* de otimalidade. Apesar de as três técnicas de amostragem produzirem resultados muito próximos para árvores com um grande número de amostras, é possível verificar uma vantagem para os casos com sorteio por LHS e QMCA, sem muita distinção entre os dois.

Por fim, são analisadas as duas metodologias para inclusão da aversão a risco à PDDE, em que se considera uma MCR formada pela combinação convexa entre o valor esperado e o CVaR. Conforme esperado, em ambas as metodologias quanto maior é o nível de aversão a risco maior o armazenamento médio nos reservatórios e, com isso, em geral menor o risco de déficit. Entretanto, para aumentar o nível dos

reservatórios é necessário despachar mais UTEs e, consequentemente, o custo esperado de operação e os CMOs são mais elevados.

Apesar das duas metodologias produzirem resultados compatíveis com o esperado e a política ótima, quando obtida, ser similar em ambos os casos, como foi observado no caso com cinco estágios, observam algumas diferenças bastante relevantes quando se aumenta o horizonte de estudo e o fator de combinação convexa. Dentre essas diferenças destaca-se a convergência mais lenta no início do processo iterativo do caso em que se inclui a MCR com a variável de estado adicional, mas que ao longo do processo iterativo pode ultrapassar o caso em que se implementou a mudança na distribuição de probabilidade no momento do cálculo dos cortes de Benders.

De acordo com os resultados analisados sugere-se utilizar a mudança de probabilidade, uma vez que nesse caso tem-se uma política de melhor qualidade em relação ao caso que se adiciona o VaR como variável de estado quando a quantidade de iterações não é muito alta. Além disso, no caso Brasileiro o CMO é de fundamental importância e no caso em que se inclui a variável de estado adicional o mesmo não pode ser obtido diretamente pelos multiplicadores de Lagrange. Finalmente, a política de operação pode ser acoplada no modelo de curto prazo (PMO) sem qualquer alteração no mesmo, visto que não é preciso calcular o VaR. Vale a pena destacar que em ambas as metodologias ainda há a dificuldade de se obter um custo superior para ser utilizado no critério de parada.

6. CONCLUSÃO

O Planejamento Anual da Operação Energética (PEN) é um problema complexo que exige uma discussão bem fundamentada dos principais aspectos de sua modelagem. Nesse sentido, ao longo deste documento discutem-se detalhadamente o conceito de otimização estocástica, a representação Reservatório Equivalente de Energia (REE), o modelo AutoRegressivo Periódico de ordem p (ARP(p)) e as contribuições deste trabalho.

Após a discussão dos principais aspectos teóricos do PEN e das contribuições, discutem-se os estudos de casos que foram usados para avaliar esses aspectos. Primeiramente, se validou a implementação do Stochastic Model for Energy Resource Allocation (SMERA), para na sequência mostrar que as não linearidades apresentadas no Capítulo 2 realmente causam consequências indesejáveis na política operativa calculada pela na PDDE.

A solução para os aspectos problemáticos do REE é bastante simples e eficiente; porém, as sugestões para o modelo ARP(p) ainda não podem ser consideradas soluções finais. Isto porque, por um lado o modelo ARP(p) modificado tem algumas limitações, visto que a re-amostragem pode causar conflitos com essa opção. Por outro lado, o modelo Independente, apesar de não causar nenhuma dificuldade na Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE) e conseguir reproduzir os três primeiros momentos estatísticos da Energia Afluente, não é um modelo adequado para séries temporais que apresentam dependência temporal, sendo difícil de produzir sequências de afluições com comportamento parecido ao encontrado em séries temporais.

Na sequência, foram discutidas as consequências de incluir o nó fantasma nos casos em que o primeiro estágio é considerado estocástico. Os resultados indicam que se justifica incluir o nó fantasma sempre que o primeiro estágio for estocástico e não for possível enumerar todos os cenários da árvore.

Uma das principais justificativas para o uso da modelagem das Usinas Hidrelétricas (UHEs) por REEs é o esforço computacional exigido para calcular uma política de boa qualidade. No entanto, mostra-se neste trabalho que, ao aplicar algumas estratégias de solução da PDDE e seleção de cortes de Benders, o tempo computacional é reduzido de maneira bastante substancial, com ganhos de até 16 vezes em relação à PDDE tradicional sem perder a qualidade da política de

operação. Os resultados indicaram que a melhor combinação para os casos em estudo é utilizar a seleção de cortes com nível de dominância unitário na estratégia de solução em que se inicia a PDDE com um cenário por recursão e incrementa-se esse valor ao longo das iterações. Assim, essa combinação foi usada nos estudos de aversão a risco e avaliação da qualidade da política de operação.

De maneira a aferir a qualidade da política de operação, a avaliação da mesma é feita considerando a combinação entre estratégia de solução da PDDE e seleção de cortes que é considerada a de melhor desempenho. Para tanto, é construído o Intervalo de Confiança (IC) com 95% de confiança do *gap* de otimalidade para árvores de cenários com 5 a 200 realizações por estágio, com o qual se nota que a partir de 100 realizações a política de operação produz ICs muito próximos. Destaca-se que as três técnicas de amostragem produziram resultados muito similares para árvores de cenários com um número de realizações grande, mas é possível verificar uma vantagem para os casos com sorteio por LHS e QMCA, sem muita distinção entre os dois. Entretanto, para o caso em estudo quando se calcula o IC do *gap* de otimalidade pelo método alternativo não se deve utilizar o sorteio por MC, uma vez que o limite inferior obtido não é muito estável e pode levar a decisões inconsistentes com a qualidade da política operativa.

Finalmente, é feita a análise da inclusão da aversão a risco por meio de duas metodologias discutidas no Capítulo 4. Os resultados indicam que ambas as metodologias produzem resultados consistentes com o que se espera, porém devido às vantagens sugere-se o uso da metodologia em que se modifica a distribuição de probabilidade quando se calcula os cortes de Benders. É importante ressaltar que em ambas as metodologias ainda há a dificuldade de se obter um limite superior para ser utilizado como critério de parada.

6.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho são analisadas várias vertentes importantes do problema do PEN, como técnicas de amostragem com redução de variância, avaliação da qualidade da política de operação, melhoria de desempenho da PDDE e metodologia de aversão a risco. Entretanto, vislumbram-se muitas oportunidades que podem ser estudadas na sequência deste trabalho, as quais são citadas abaixo:

- Modelagem:

- Devido à redução do tempo computacional com a melhoria de desempenho da PDDE é importante estudar o caso com UHEs individualizadas;
- A geração de energias afluentes com dependência temporal, porém sem adicionar os aspectos problemáticos que o modelo $ARP(p)$ atual pode trazer para a política de operação;
- Inclusão de novas fontes de geração, sendo que algumas delas podem ter incertezas quanto à disponibilidade de energia, como é o caso das Usinas Eólicas;
- Com o aumento da participação termelétrica no parque de geração Brasileiro, sugere-se reavaliar o horizonte de estudo;
- Construção da árvore de cenários:
 - Neste trabalho a árvore de cenários tem o mesmo número de realizações em todos os estágios; contudo, devido à taxa de desconto é possível que uma modelagem menos precisa nos estágios futuros não tenha consequências muito significativas no primeiro ano;
 - Considerar técnicas de agregação das realizações para reduzir o tamanho da árvore de cenários sem perder sua representatividade perante o problema original e permitindo o compartilhamento de cortes na PDDE;
- Avaliação da qualidade da política:
 - Definir uma metodologia que faça a avaliação ao longo do processo iterativo da PDDE e se a árvore não for suficientemente representativa, aumentar o número de realizações que a compõe. Para tanto, seria importante aproveitar os cortes obtidos até o momento da mudança da árvore de cenários;
- Melhoria de desempenho da PDDE:
 - Na seleção de cortes é interessante avaliar outros estados que não foram visitados ainda, possivelmente uma estratégia interessante é considerar estados que são uma combinação convexa daqueles já conhecidos;
 - As análises deste trabalho focam no caso com 200 cenários por iteração e aumentar um cenário das recursões a cada iteração quando for o caso, porém faz-

- se necessário um estudo de sensibilidade para outras configurações;
- Substituir variáveis de folgas por cortes de viabilidade;
- Aversão a Risco:
 - Definir uma metodologia para o cálculo do custo superior, que é importante para o critério de parada;
 - Definir a dinâmica que a combinação convexa deve seguir para o caso Brasileiro;
 - Com a metodologia de mudança de probabilidade no momento do cálculo do corte de Benders é possível usar outras MCRs e comparar com a combinação convexa entre valor esperado e o CVaR;
 - Considerar restrições probabilísticas ao invés da MCR;
- Algoritmo de solução:
 - Analisar outros algoritmos para comparar com a PDDE.

APÊNDICE A. TESTE DE HIPÓTESES

Em processos estatísticos é muito difícil considerar toda a população para tomar algum tipo de decisão, devido ao elevado número de dados ou dificuldade para obter todos os dados. Por exemplo, considere que será escrita uma lei para regulamentar o espaçamento entre bancos de ônibus. Uma estratégia consiste em definir se a altura média da população Brasileira é menor do que o valor utilizado no cálculo do espaçamento dos bancos. No entanto, é inviável medir a altura de todos os Brasileiros para definir a altura média da população Brasileira. Dessa forma, a decisão a ser tomada deve ser feita com base em uma amostra da população.

Neste caso não se conhece o valor médio com precisão, assim, tem-se que a amostra fornecerá uma aproximação estatística com um determinado nível de confiança acerca deste valor. Dessa forma, para o exemplo, para determinar se o valor médio da amostra é menor do que o estipulado no início do estudo, deve-se formular um teste de hipótese que irá fornecer uma decisão estatística para um nível de confiança a ser definido.

Em testes de hipóteses têm-se sempre duas hipóteses, a primeira que é denominada de hipótese nula ou H_0 e, a segunda, de hipótese alternativa ou H_1 (SPIEGEL, 1975). A hipótese nula é aquela formulada com o objetivo de ser rejeitada, isto decorre dos erros que se está sujeito ao aceitar ou rejeitar H_0 , que serão discutidos mais a frente. Por outro lado, a hipótese alternativa é o conjunto de todas as outras possibilidades. Assim, no caso do exemplo tem-se que:

H_0 : altura média da amostra \geq valor definido

H_1 : altura média da amostra $<$ valor definido

Podem ser tomadas duas decisões: rejeitar ou manter a hipótese nula. Associada a cada decisão, tem-se uma probabilidade de erro, que são definidos em dois tipos: Tipo I e Tipo II. No erro Tipo I a hipótese nula é rejeitada mesmo sendo verdadeira, enquanto que no erro Tipo II a hipótese nula é mantida mesmo sendo falsa. Assim, a Tabela A.1 apresenta uma compilação entre as combinações das decisões tomadas e dos tipos de erros associados.

Tabela A.1 - Tabela de erros para o teste de hipótese.

	H0 é verdadeira	H0 é falsa
H0 é rejeitada	Erro Tipo I	Decisão Correta
H0 é mantida	Decisão Correta	Erro Tipo II

Um erro de Tipo I é definido pelo nível de significância (α) do teste, que em geral é definido ao formular as hipóteses do teste. Enquanto que um erro do Tipo II é definido pelo complemento da potência do teste (β); ou seja, por $1-\beta$. A potência do teste é um parâmetro que mede a probabilidade de uma hipótese nula ser corretamente rejeitada, porém o cálculo deste parâmetro não é trivial e depende do problema em estudo. Esse é o motivo do teste ser usualmente formulado de maneira a tentar rejeitar H_0 , tem-se controle do α , que é definido de acordo com o desejado, e, portanto, controla-se o nível de erro aceito ao tomar uma decisão errada. É importante ressaltar que ao reduzir o risco de um erro Tipo I ou II aumenta-se o risco do outro tipo de erro, exceto quando se aumenta o número de amostras, que pode ser proibitivo em algumas aplicações (SPIEGEL, 1975).

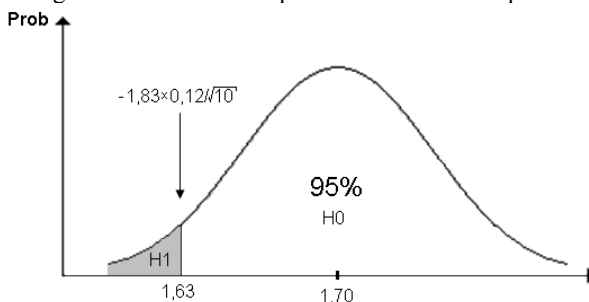
Dessa forma, considere o exemplo da altura média da população Brasileira e que por simplicidade a amostra foi feita com 10 pessoas {162, 175, 180, 173, 194, 188, 154, 170, 167, 182} (cm), em que a altura média é 174,5 cm e o desvio padrão é 12 cm. Como se deseja saber se a altura média é menor do que 170 cm, formula-se o seguinte teste de hipótese:

$$H_0: 174,5 \geq 170$$

$$H_1: 174,5 < 170$$

Como o número de amostras é pequeno, deve-se considerar uma distribuição t -student para fazer o teste, que para um nível de confiança de 5% e $N-1$ graus de liberdade fornece uma distância de 1,83 desvios padrões do valor de referência. Assim, a Figura A.1 ilustra as regiões em que H_0 é mantida e rejeitada. Pela figura abaixo se verifica que a altura média amostral está na área branca o que indica que a hipótese nula deve ser mantida.

Figura A.1 - Teste de Hipótese Unilateral à Esquerda.



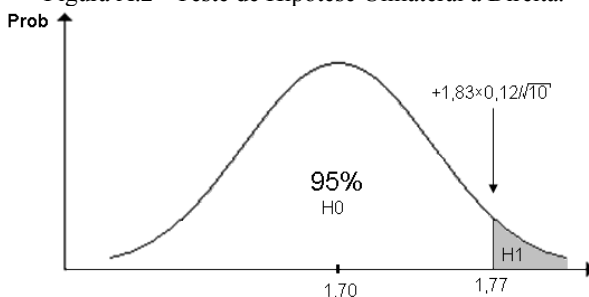
Considere agora que para o mesmo conjunto de amostras deseja-se saber se a altura média é maior do que 170 cm, com isso o novo teste de hipótese é dado por:

$$H_0: 174,5 \leq 170$$

$$H_1: 174,5 > 170$$

Dessa forma, a Figura A.2 ilustra as regiões de rejeição e aceitação da hipótese nula para um nível de confiança de 5% e, assim como no caso anterior, verifica-se que o valor médio está na área branca indicando que a hipótese nula deve ser mantida.

Figura A.2 - Teste de Hipótese Unilateral à Direita.



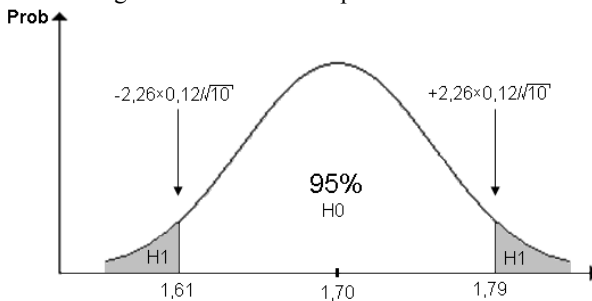
Os dois exercícios acima demonstram que ao manter a hipótese nula pouco se pode afirmar do valor analisado, visto que em nenhum dos dois casos é possível afirmar com um nível de confiança desejado que a solução encontrada seja verdadeira. Os dois exemplos são caracterizados como teste de hipótese unilateral à esquerda e a direita, respectivamente. Além deles, tem-se o teste de hipótese bilateral que está associado a uma hipótese alternativa de diferença. Continuando com o exemplo acima, considere que deseja-se avaliar se o valor médio é diferente de 170cm, então:

$$H_0: 174,5 = 170$$

$$H1: 174,5 \neq 170$$

A Figura A.3 apresenta as regiões de rejeição e aceitação da hipótese nula para um nível de confiança de 5%. Pela figura verifica-se que se tem duas regiões de rejeição, pois não faz diferença se o valor é maior ou menor, apenas que é diferente. Além disso, destaca-se que a distância das regiões de rejeições para o valor de referência ficou maior, nesse caso são 2,26 desvios padrões.

Figura A.3 - Teste de Hipótese Bilateral.



Assim, como nos dois casos anteriores, a hipótese nula é mantida, uma vez que o valor médio continua na área branca. Portanto, em todos os três exemplos apresentados nesse apêndice a hipótese nula foi mantida, que provavelmente é uma consequência do baixo número de amostras do exemplo.

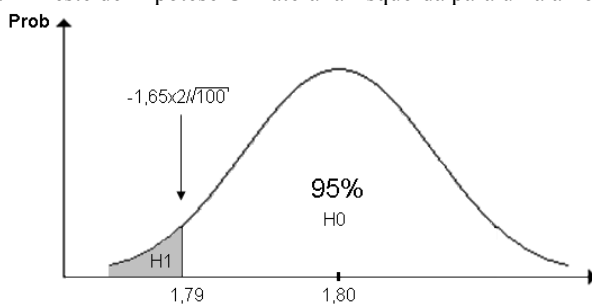
Por fim, considere o caso em que se avaliou uma amostra com 100 pessoas, cujo valor médio da altura é 178 cm e o desvio padrão é 2 cm. Deseja-se saber se a altura média da população é menor que 180 cm para um nível de confiança de 5%, assim, o teste de hipótese é dado por:

$$H0: 178 \geq 180$$

$$H1: 178 < 180$$

A Figura A.4 ilustra as regiões de rejeição e aceitação de $H0$, na qual se pode observar que a hipótese nula é rejeitada e, portanto, tem-se um risco de apenas 5% de considerar que a altura média da população é menor que 180 cm. Ressalta-se que como N é grande (100) a distribuição t -student é equivalente a distribuição Normal, usualmente para valores de N acima de 30 esta equivalência já pode ser considerada como verdade.

Figura A.4 - Teste de Hipótese Unilateral à Esquerda para uma amostra maior.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Agência Nacional de Energia Elétrica. **Banco de Informação de Geração**. Disponível em www.aneel.gov.br. Acessado em 2009.

ARCHIBALD, T. W.; BUCHANAN, C. S.; THOMAS, L. C.; MCKINNON, K. I. M. Controlling multi-reservoir systems. **European Journal of Operational Research**, v.129, n.3, p.619-626. 2001.

ARTZNER, P.; DELBAEN, F.; EBER, J.-M.; HEATH, D. Coherent Measures of Risk. **Mathematical Finance**, v.9, n.3, p.203-228. 1999.

ARVANITIDIS, N. V.; ROSING, J. Composite Representation of a Multireservoir Hydroelectric Power System. **Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on**, v.PAS-89, n.2, p.319-326. 1970a.

_____. Optimal Operation of Multireservoir Systems Using a Composite Representation. **Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on**, v.PAS-89, n.2, p.327-335. 1970b.

BAILEY, T. G.; JENSEN, P. A.; MORTON, D. P. Response surface analysis of two-stage stochastic linear programming with recourse. **Naval Research Logistics**, v.46, n.7, p.753-776. 1999.

BAYRAKSAN, G.; MORTON, D. P. Assessing solution quality in stochastic programs. **Mathematical Programming**, v.108, n.2, p.495-514. 2006.

BENDERS, J. F. Partitioning Procedure for Solving Mixed Variables Programming Problems. **Numerische Mathematik**, v.4, p.238-252. 1962.

BIRGE, J. R.; LOUVEAUX, F. **Introduction to stochastic programming**. New York, N.Y.: Springer. xix, 421 p. p., Springer series in operations research. 1997.

BRANDI, R. B. S. **Processo iterativo de construção da função de custo futuro na metodologia PDE-ConvexHull**. Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora. 119 p. 2011.

CARVALHO, L. C. X. **Planejamento de sistemas hidrotérmicos: Uma análise comparativa entre as representações a usinas individualizadas e a reservatórios equivalentes de energia**. Dissertação de Mestrado em

Engenharia Elétrica, PGEEL, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, SC, 2002.

CASTRO, J.; GONZÁLEZ, J. A. A nonlinear optimization package for long-term hydrothermal coordination. **European Journal of Operational Research**, v.154, n.3, p.641-658. 2004.

Centro de Pesquisa de Energia Elétrica. Manual de Referência do Modelo NEWAVE. Rio de Janeiro, 2001.

Centro de Pesquisa de Energia Elétrica. Nota Técnica nº 52 - Modelagem da função de perdas a fio d'água através de MARS (Multivariate Adaptive Regression Splines). Rio de Janeiro, 2010.

CHARBENEAU, R. J. Comparison of the Two- and Three-Parameter Log Normal Distributions Used in Streamflow Synthesis. **Water Resources Research**, v.14. 1978.

CHEN, Z. L.; POWELL, W. B. Convergent cutting-plane and partial-sampling algorithm for multistage stochastic linear programs with recourse. **J. Optim. Theory Appl.**, v.102, n.3, p.497-524. 1999.

CHIRALAKSANAKUL, A. **Monte Carlo Methods for Multi-stage Stochastic Programs**. Dissertation of Philosophy Doctor, University of Texas. Austin, Texas, 2003.

CHIRALAKSANAKUL, A.; MORTON, D. P. **Assessing policy quality in multi-stage stochastic programming**. Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik. 2004.

CRUZ, G., JR. DA; SOARES, S. Non-uniform composite representation hydroelectric systems for long-term hydrothermal scheduling. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v.11, n.2, p.702-707. 1996.

DA COSTA, J. P.; DE OLIVEIRA, G. C.; LEGEY, L. F. L. Reduced Scenario Tree Generation for Mid-term Hydrothermal Operation Planning. In: **Probabilistic Methods Applied to Power Systems, 2006. PMAPS 2006. International Conference on**. 11-15 June 2006, p.1-7. 2006.

DE MATOS, V. L. **Análise comparativa entre as modelagens de Reservatório Equivalente de Energia agregado por Subsistema e por Cascata no problema do Planejamento Anual da Operação Energética**.

Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica, PGEEL, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, SC, 2008.

DE MATOS, V. L.; PHILPOTT, A. B.; FINARDI, E. C.; GUAN, Z. Solving Long-Term Hydrothermal Scheduling Problem. In: **17th Power Systems Computation Conference**, Stockholm, 2011.

DEVROYE, L. **Non-uniform random variate generation**. New York: Springer-Verlag. xvi, 843 p. p. 1986.

DONOHUE, C. J.; BIRGE, J. R. The Abridged Nested Decomposition Method for Multistage Stochastic Linear Programs with Relatively Complete Recourse. **Algorithmic Operations Research**, v.1, n.1, p.20-30. 2006.

DOS SANTOS, M. L. L. **Aplicação da Modelagem Orientada a Objetos ao Problema do Planejamento de Sistemas Hidrotérmicos**. Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica, PGEEL, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, SC, 2004.

DOS SANTOS, M. L. L.; DA SILVA, E. L.; FINARDI, E. C.; GONÇALVES, R. E. C. Solving the Short Term Operating Planning Problem of Hydrothermal Systems by Using the Progressive Hedging Method. In: **16th Power System Computation Conference (PSCC)**, Glasgow, Escócia, 2008.

_____. Practical aspects in solving the medium-term operation planning problem of hydrothermal power systems by using the progressive hedging method. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, v.31, n.9, p.546-552. 2009.

DREW, S. S.; HOMEM-DE-MELLO, T. Quasi-Monte Carlo strategies for stochastic optimization. **Proceedings of the 38th conference on Winter simulation**, Monterey, California: Winter Simulation Conference, p.774-782. 2006.

DUPAČOVÁ, J.; CONSIGLI, G.; WALLACE, S. W. Scenarios for Multistage Stochastic Programs. **Annals of Operations Research**, v.100, n.1, p.25-53. 2000.

ESCUADERO, L. F.; DE LA FUENTE, J. L.; GARCIA, C.; PRIETO, F. J. Hydropower generation management under uncertainty via scenario

analysis and parallel computation. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v.11, n.2, p.683-689. 1996.

FINARDI, E. C. **Planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos utilizando processamento de alto desempenho**. Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica, PGEEL, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, SC, 1999.

FINARDI, E. C.; DA SILVA, E. L. Unit commitment of single hydroelectric plant. **Electric Power Systems Research**, v.75, n.2-3, p.116-123. 2005.

_____. Solving the hydro unit commitment problem via dual decomposition and sequential quadratic programming. **Power Systems, IEEE Transactions on**, v.21, n.2, p.835-844. 2006.

FREIMER, M. B.; THOMAS, D. J.; LINDEROTH, J. T. **The Impact of Sampling Methods on Bias and Variance in Stochastic Linear Programs**. Technical Report 05T-002, Department of Industrial and Systems Engineering, Lehigh University. 2005

FRIEDEL, I.; KELLER, A. Fast Generation of Randomized Low-Discrepancy Point Sets. In: **Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods**, Hong Kong Springer, 2000.

FRIEDEL, I.; KELLER, A. **LIBSEQ - Low Discrepancy Sequence Library**. Disponível em <http://multires.caltech.edu/software/libseq>. Acessado em 31/03/2010, 2010.

GARCIA, A. G. N. **Representação do Processo Estocástico de Energias Afluentes por Modelos Auto-Regressivos Periódicos no Planejamento de Sistemas Hidrotérmicos**. Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica, PGEEL, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, SC, 2005.

GONÇALVES, R. E. C.; FINARDI, E. C.; SILVA, E. L. D. Applying different decomposition schemes using the progressive hedging algorithm to the operation planning problem of a hydrothermal system. **Electric Power Systems Research**, v.83, n.1, p.19-27. 2012.

GONÇALVES, R. E. C.; FINARDI, E. C.; SILVA, E. L. D.; SANTOS, M. L. L. D. Comparing stochastic optimization methods to solve the medium-

term operation planning problem. **Computational & Applied Mathematics**, v.30, p.289-313. 2011.

GUIGUES, V.; ROMISCH, W. **Sampling-based decomposition methods for multistage stochastic programs based on extended polyhedral risk measures**. Disponível em http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2010/10/2763.html. Acessado em 14/06/2012, 2012.

GUIGUES, V.; SAGASTIZABAL, C. **Risk-averse adaptive strategies for large-scale multistage stochastic linear programming**. Disponível em http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2009/02/2215.html. Acessado em 14/06/2012, 2011.

GUIGUES, V.; SAGASTIZÁBAL, C. The value of rolling-horizon policies for risk-averse hydro-thermal planning. **European Journal of Operational Research**, v.217, n.1, p.129-140. 2012.

HEITSCH, H.; RÖMISCH, W. Scenario tree modeling for multistage stochastic programs. **Mathematical Programming**, v.118, n.2, p.371-406. 2009.

HIGLE, J. L.; SEN, S. **Stochastic decomposition : a statistical method for large scale stochastic linear programming**. Dordrecht ; Boston: Kluwer. xxiii, 220 p. p., Nonconvex optimization and its applications v. 8. 1996.

HIPEL, K. W.; MCLEOD, A. I. **Time series modelling of water resources and environmental systems**. Amsterdam ; New York: Elsevier. xxxvii, 1013 p. p., Developments in water science 45. 1994.

HOMEM-DE-MELLO, T. On Rates of Convergence for Stochastic Optimization Problems Under Non-Independent and Identically Distributed Sampling. **SIAM J. on Optimization**, v.19, n.2, p.524-551. 2008.

HOMEM-DE-MELLO, T.; DE MATOS, V.; FINARDI, E. Sampling strategies and stopping criteria for stochastic dual dynamic programming: a case study in long-term hydrothermal scheduling. **Energy Systems**, v.2, n.1, p.1-31. 2011.

INFANGER, G.; MORTON, D. P. Cut Sharing for Multistage Stochastic Linear Programs with Interstage Dependency. **Mathematical Programming**, v.75, n.241-256. 1996.

JACOBS, J.; FREEMAN, G.; GRYGIER, J.; MORTON, D.; SCHULTZ, G.; STASCHUS, K.; STEDINGER, J. SOCRATES: A system for scheduling hydroelectric generation under uncertainty. **Annals of Operations Research**, v.59, n.1, p.99-133. 1995.

JARDIM, D. L. D. D.; MACEIRA, M. E. P.; FALCÃO, D. M. Stochastic streamflow model for hydroelectric systems using clustering techniques. In: **2001 IEEE Porto Power Tech Proceedings**. 2001, v.3, p.6 pp. vol.3. 2001.

KALL, P.; FRAUENDORFER, K.; RUSZCZYNSKI, A. P. Approximation techniques in stochastic programming. In: Yu M. Ermoliev Roger J-B Wets (Ed.). **Numerical Techniques for Stochastic Optimization**. Berlin: Springer-Verlag, 1988

KLEYWEGT, A. J.; SHAPIRO, A.; HOMEM-DE-MELLO, T. The Sample Average Approximation Method for Stochastic Discrete Optimization. **SIAM J. on Optimization**, v.12, n.2, p.479-502. 2002.

KLIGERMAN, A. S. **Operação ótima de subsistemas hidrotérmicos interligados utilizando programação dinâmica estocástica dual**. Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica, Faculdade de Engenharia Elétrica, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, SP, 1992.

KLIGERMAN, A. S.; BARRETTO, L. A. L.; CHIPP, H. J.; LIMA, M. C. A.; MERCIO, C. M. V. D. B. Incorporação da curva de aversão a risco no modelo NEWAVE. In: **XVIII SNPTTE - SEMINÁRIO NACIONAL DE PRODUÇÃO E TRANSMISSÃO DE ENERGIA ELÉTRICA**, Curitiba, 2005.

L'ECUYER, P.; LEMIEUX, C. Recent Advances in Randomized Quasi-Monte Carlo Methods. In: (Ed.). **Modeling Uncertainty: An Examination of Stochastic Theory, Methods, and Applications**, 2005, p.419-474

LAMOND, B. F.; MONROE, S. L.; SOBEL, M. J. A reservoir hydroelectric system: Exactly and approximately optimal policies. **European Journal of Operational Research**, v.81, n.3, p.535-542. 1995.

MACEIRA, M. E. P.; DAMÁZIO, J. M. The use of PAR(p) model in the Stochastic Dual Dynamic Programming Optimization Scheme used in the operation planning of the Brazilian Hydropower System. **8th International Conference on Probabilistic Methods Applied to Power Systems**, Ames, Iowa, p.397-402. 2004.

MACEIRA, M. E. P.; MERCIO, C. M. V. D. B.; GORENSTIN, G. B.; CUNHA, S. H. F.; SUANNO, C.; SACRAMENTO, M. C.; KLIGERMAN, A. S. Energy evaluation of the North/Northeastern and South/Southeastern interconnection with NEWAVE model. In: **Symposium of Specialists in Electric Operational and Expansion Planning - SEPOPE**, Salvador, BA, Brasil, 1998.

MANTAWY, A. H.; SOLIMAN, S. A.; EL-HAWARY, M. E. The long-term hydro-scheduling problem--a new algorithm. **Electric Power Systems Research**, v.64, n.1, p.67-72. 2003.

MARQUES, T. C.; CICOGNA, M. A.; SOARES, S. Assessment of energy availability in hydro systems under different operational policies. In: **Power Tech, 2005 IEEE Russia**, p.1-5. 2005.

_____. Benefits of coordination in the operation of hydroelectric power systems: Brazilian case. In: **Power Engineering Society General Meeting, 2006. IEEE**, p.8 pp. 2006.

MARTINEZ, L.; SOARES, S. Comparison between Closed-Loop and Partial Open-Loop Feedback Control Policies in Long-Term Hydrothermal Scheduling. **Power Engineering Review, IEEE**, v.22, n.4, p.74-75. 2002.

_____. Primal and dual stochastic dynamic programming in long term hydrothermal scheduling. In: **Power Systems Conference and Exposition, 2004. IEEE PES**, p.1283-1288 vol.3. 2004.

MARTINS, L. S. A.; SOARES, S.; AZEVEDO, A. T. A nonlinear model for the long-term hydro-thermal generation scheduling problem over multiple areas with transmission constraints. In: **Power Systems Conference and Exposition, 2009. PSCE '09. IEEE/PES**, p.1-7. 2009.

MCKAY, M. D.; BECKMAN, R. J.; CONOVER, W. J. A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code. **Technometrics**, v.21, n.2, p.239-245. 1979.

_____. A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. **Technometrics**, v.42, n.1, p.55-61. 2000.

MERCIO, C. M. V. D. B. **Resolução de problemas de planejamento de sistemas hidrotérmicos com representação do sistema por modelo equivalente de energia adotando acoplamento hidráulico**. Dissertação de

Mestrado em Engenharia Civil, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, RJ, 2000.

MORTON, D. **Assessing Policy Quality in a Multi-Stage Stochastic Program for Long-Term Hydrothermal Planning**. 2009

MORTON, D. P. Stopping rules for a class of sampling-based stochastic programming algorithms. **Operations Research**, v.46, n.5, p.710-718. 1998.

NIEDERREITER, H. **Random number generation and quasi-Monte Carlo methods**. Philadelphia, Pa.: Society for Industrial and Applied Mathematics. vi, 241 p. p., CBMS-NSF regional conference series in applied mathematics 63. 1992.

NOAKES, D. J.; MCLEOD, I.; HIPEL, K. W. Forecasting monthly riverflow time series. **International Journal of Forecasting**, v.1, p.179-190. 1985.

OLIVEIRA, W. L. **Redução ótima de cenários em Programação Estocástica. Aplicação às vazões afluentes aos aproveitamentos Hidroelétricos**. Dissertação de Mestrado em Matemática, Departamento de Matemática, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro. 126 p. 2007.

Operador Nacional do Sistema Elétrico. Procedimentos de Rede - Módulo 7: Planejamento da Operação Energética. 2009.

PENNA, D. D. J.; MACEIRA, M. E. P.; DAMÁZIO, J. M. Selective Sampling Applied to Long-term Hydrothermal Generation Planning. In: **17th PSCC Proceedings**, Estocolmo, Suécia, v.1, p.1318-1325. 2011.

PEREIRA, M. V. F.; CAMPODÓNICO, N.; KELMAN, R. **Application of Stochastic Dual DP and Extensions to Hydrothermal Scheduling**. PSRI. Rio de Janeiro. 1999

PEREIRA, M. V. F.; OLIVEIRA, G. C.; COSTA, C. G. C.; KELMAN, J. Stochastic Streamflow Models for Hydroelectric Systems. **Water Resource Research**, v.20, n.3, p.379-390. 1984.

PEREIRA, M. V. F.; PINTO, L. M. V. G. A Decomposition Approach to the Economic Dispatch of Hydrothermal Systems. **Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on**, v.PAS-101, n.10, p.3851-3860. 1982.

_____. Application of Decomposition Techniques to the Mid - and Short - Term Scheduling of Hydrothermal Systems. **Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on**, v.PAS-102, n.11, p.3611-3618. 1983.

_____. Stochastic optimization of a multireservoir hydroelectric system: A decomposition approach. **Water Resource Research**, v.21, n.6, p.779-792. 1985.

_____. Multi-stage stochastic optimization applied to energy planning. **Mathematical Programming**, v.52, p.359-375. 1991.

PHILPOTT, A. B.; DE MATOS, V. L. Dynamic sampling algorithms for multi-stage stochastic programs with risk aversion. **European Journal of Operational Research**, v.218, n.2, p.470-483. 2012.

PHILPOTT, A. B.; GUAN, Z. On the convergence of stochastic dual dynamic programming and related methods. **Operations Research Letters**, v.36, n.4, p.450-455. 2008.

ROCKAFELLAR, R. T.; URYASEV, S. Conditional value-at-risk for general loss distributions. **Journal of Banking & Finance**, v.26, n.7, p.1443-1471. 2002.

RODRIGUES, R. N. **Um modelo para a programação da operação de sistemas hidrotérmicos baseado em relaxação lagrangeana** Tese de Doutorado em Engenharia Elétrica, PGEEL, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis-SC, 2009.

RUSZCZYNSKI, A. Risk-averse dynamic programming for Markov decision processes. **Math. Program.**, v.125, n.2, p.235-261. 2010.

RUSZCZYNSKI, A.; SHAPIRO, A. Conditional Risk Mappings. **Math. Oper. Res.**, v.31, n.3, p.544-561. 2006.

RUSZCZYNSKI, A. P.; SHAPIRO, A. **Stochastic programming**. Amsterdam ; Boston: Elsevier. x, 688 p. p., Handbooks in operations research and management science v. 10. 2003.

SHAPIRO, A. Stochastic programming approach to optimization under uncertainty. **Math. Program.**, v.112, n.1, p.183-220. 2007.

_____. Analysis of stochastic dual dynamic programming method. **European Journal of Operational Research**, v.209, n.1, p.63-72. 2011.

SHAPIRO, A.; DENTCHEVA, D.; RUSZCZYNSKI, A. P. **Lectures on stochastic programming : modeling and theory**. Piscataway, N.J.: Rutgers University. MPS-SIAM series on optimization 9. 2009.

SHAPIRO, A.; PHILPOTT, A. B. **A Tutorial on Stochastic Programming**. Disponível em <http://stoprog.org/index.html?SPTutorial/SPTutorial.html>. Acessado em 10/12/2009, 2009.

SHAPIRO, A.; TEKAYA, W.; DA COSTA, J. P.; SOARES, M. P. **Report for technical cooperation between Georgia Institute of Technology and ONS { Operador Nacional do Sistema Elétrico)**. Disponível em http://www2.isye.gatech.edu/people/faculty/Alex_Shapiro/ONS-1.pdf. Acessado em 08-11-2011, 2011.

_____. **Risk neutral and risk averse Stochastic Dual Dynamic Programming method**. Disponível em http://www.optimization-online.org/DB_FILE/2012/01/3307.pdf. Acessado em 19/03/2012, 2012.

SHERKAT, V. R.; CAMPO, R.; MOSLEHI, K.; LO, E. O. Stochastic Long-Term Hydrothermal Optimization for a Multireservoir System. **Power Apparatus and Systems, IEEE Transactions on**, v.PAS-104, n.8, p.2040-2050. 1985.

SILVA, E. L. D. **Formação de Preços em Mercados de Energia Elétrica**. 1. Porto Alegre, RS: Sangra Luzzato. 2001.

SIQUEIRA, T. G.; ZAMBELLI, M.; CICOGNA, M.; ANDRADE, M.; SOARES, S. Stochastic Dynamic Programming for Long Term Hydrothermal Scheduling Considering Different Streamflow Models. In: **Probabilistic Methods Applied to Power Systems, 2006. PMAPS 2006. International Conference on**, p.1-6. 2006.

SLYKE, R. M. V.; WETS, R. L-Shaped Linear Programs with Applications to Optimal Control and Stochastic Programming. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, v.17, n.4, p.638-663. 1969.

SOARES, S.; CARNEIRO, A. A. F. M. Optimal operation of reservoirs for electric generation. **Power Delivery, IEEE Transactions on**, v.6, n.3, p.1101-1107. 1991.

_____. Reservoir operation rules for hydroelectric power system optimization. In: **Athens Power Tech, 1993. APT 93. Proceedings. Joint International Power Conference**, v.2, p.965-969. 1993.

SPIEGEL, M. R. **Schaum's outline of theory and problems of probability and statistics**. New York: McGraw-Hill. 372 p. p., Schaum's outline series in mathematics. 1975.

STENDIGER, J. R. **Report on the Evaluation of CEPEL's PAR Models**. Cornell University. Ithaca. 2001

WALLACE, S. W.; FLETEN, S.-E. Stochastic Programming Models in Energy. In: A. Ruszczyński, A. Shapiro (Ed.). **Handbooks in Operations Research and Management Science**: Elsevier, v. Volume 10, 2003, p.637-677

ZAMBELLI, M. S.; LUNA, I.; SOARES, S. Long-term hydropower scheduling based on deterministic nonlinear optimization and annual inflow forecasting models. In: **PowerTech, 2009 IEEE Bucharest**, p.1-8. 2009.

ZAMBELLI, M. S.; SOARES, S. A predictive control approach for long term hydrothermal scheduling. In: **Power Systems Conference and Exposition, 2009. PSCE '09. IEEE/PES**, p.1-8. 2009.